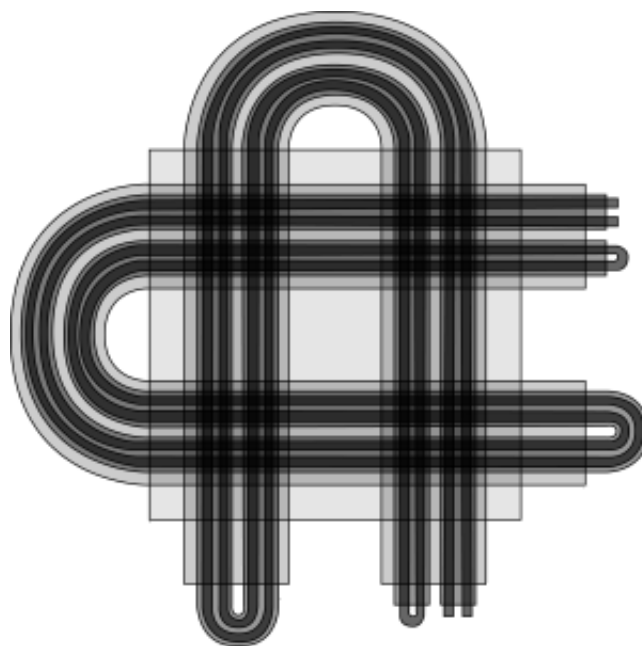


Математические основы хаотических динамических систем*

Курс лекций

Александр Лоскутов, физический факультет МГУ



— Москва —

*Частично опубликовано в журнале *Успехи физ. наук*, 2007, т.177, No 9, с.989–1015.

Содержание

1	Введение. Немного истории	3
2	Динамические системы и хаос	8
2.1	Общие положения	8
2.2	Аттракторы	12
2.3	Хаос	13
3	Гиперболическая динамика	16
3.1	Гиперболические множества	16
3.2	Подкова Смейла	18
4	Гомоклинические структуры	21
4.1	Гомоклинические траектории	21
4.2	Рождение подков из гомоклинической картины	24
4.3	Гомоклинические касания и дикие гиперболические множества	28
4.4	Символическая динамика	34
5	Хаотические аттракторы динамических систем	36
5.1	Странные и хаотические аттракторы	36
5.2	Гиперболические аттракторы	38
5.3	Стохастические и другие аттракторы	41
6	Хаос в физических системах	44
6.1	Хаос и странные аттракторы	44
6.2	Неустойчивые множества и захват траекторий	46
7	Эргодические аспекты динамического хаоса	50
7.1	Показатели Ляпунова	50
7.2	Энтропия	52
7.3	Размерностные характеристики	55
7.4	Оценки энтропии и размерности	56
7.5	Статистические свойства динамических систем	57
8	Реконструкция динамических систем	61
8.1	Элементы теории Такенса	62
8.2	Задача идентификации	63
8.3	Задача прогноза	64
9	Случайность и хаос	66
9.1	Конечномерные и бесконечномерные наблюдаемые	66
9.2	К определению хаоса и случайности	67
10	Заключение	69

1 Введение. Немного истории

Динамический подход к описанию систем самого различного происхождения известен со времен Ньютона. Он является основой анализа большинства классических явлений в физике и других естественных науках: сначала строится соответствующая математическая модель в виде динамических уравнений, а затем тем или иным способом изучаются их решения, которые, в принципе, можно сопоставить с экспериментальными данными. Развитие этих идей, а также представление, что состояние модели в любой момент времени должно однозначно определяться начальными условиями, привело исследователей к понятию динамической системы.

Хотя динамическая система и является некоторой математической абстракцией, данная парадигма оказалась весьма продуктивным инструментом при описании многих реальных явлений. Наибольший успех в этом направлении был получен в первой трети XX века, когда была создана теория колебаний двумерных систем. Последующие усилия исследователей были посвящены изучению возможности распространить эту теорию на многомерные системы. Однако, несмотря на значительные открытия в данной области, до 60-х годов XX столетия не было понятно, насколько сложными могут быть движения в таких системах.

Ситуация коренным образом изменилась после того как С.Смейл [2, 3] заложил основы гиперболической теории. Исследования в этом направлении выявили большое разнообразие динамики нелинейных систем и привели к одному из важнейших открытий XX века — динамическому хаосу. Были введены U -системы [4, 5] (позже названные системами Аносова), описаны бифуркации петель сепаратрис, приводящие к сложному поведению [6, 7], и изучены бильярдные модели, являющиеся упрощенными моделями статистической физики [8, 9].

Однако в то время эти идеи не находили широкого признания, поскольку построенные примеры носили весьма абстрактный характер, и было неясно, имеют ли данные конструкции какое-либо отношение к реальности. Более того, было распространено мнение, что хаотические явления, присущие физическим системам, имеют переходной характер, и, если достаточно долго наблюдать за системой, то хаос должен выродиться в ре-

гулярное движение.

Такая точка зрения сохранялась до середины семидесятых годов, когда математические идеи теории динамических систем удалось связать с физической моделью, относящейся к гидродинамике, — знаменитой системой Лоренца (см. [12]). С этого времени началось систематическое изучение динамического хаоса¹.

Классическими примерами хаоса являются азартные игры, которые, в частности, изучаются теорией вероятности. Однако азартные игры — это недетерминированный процесс. Здесь допускается присутствие элемента случайности. Теория хаотических систем использует методы теории вероятности, однако не является ее частью. Хаос же следует определить как некоторый случайный процесс, который наблюдается в динамических системах, не подверженных влиянию шумов или каких-либо случайных сил. Поэтому теория хаоса рассматривается как часть теории динамических систем.

Для систем статистической механики с большим числом степеней свободы N , находящихся в состоянии равновесия, конфигурации частиц не подчиняются никаким динамическим законам и имеют предельное распределение при $N \rightarrow \infty$. Такие системы находятся в состоянии пространственного беспорядка. Одним из основных достижений теории хаоса является установление факта, что время в динамике играет ту же роль, что и число степеней свободы в статистической механике. Иными словами, детерминированный хаос описывается как динамический беспорядок.

В консервативных системах, природа динамического хаоса в которых недавно была подробно описана в работе [15], фазовый объем сохраняется. Этот означает, что выполняется теорема Лиувилля. Данное фундаментальное свойство предопределяет характер эволюции и дает ключ к пониманию происхождения хаотичности в консервативных системах. В диссипативных системах вследствие диссипации имеет место сжатие фазового объема. Эта принципиальное отличие проявляется в том, что в фазовом пространстве диссипативных систем появляются притягивающие множества, которые не существуют в консервативных системах — аттракторы

¹ История возникновения динамического хаоса и развитие теоретических представлений об этом феномене детально представлены в замечательной монографии [10].

(от англ. *attract* — притягивать).

Использование термина «аттрактор» легко понять, если обратиться к примеру с маятником в вязкой среде. Допустим, что маятник находится в нижнем положении устойчивого равновесия (в устойчивой стационарной точке). Если теперь немного его возмутить, то он начнет совершать затухающие колебания около этого равновесного положения. В этом смысле состояние равновесия маятника будет словно бы притягивающим, или аттрактором. При этом, очевидно, аттрактор будет иметь нулевую меру. Аналогичным образом можно получить представление об аттракторах, отвечающих периодическому (предельные циклы) и квазипериодическому (инвариантные торы) движениям. Формализация этих идей приводит к современному понятию аттрактора.

С изменением параметров системы аттракторы тоже меняются. Однако при некоторых значениях параметров может произойти их качественная перестройка. Например, устойчивый фокус может смениться предельным циклом. Такие значения параметров называются бифуркационными, а сама перестройка — бифуркацией. Установление в динамической системе хаотического поведения в результате той или иной последовательности бифуркаций принято называть картиной или сценарием развития хаоса.

Где же лежит граница между регулярной, но сложной динамикой, и хаосом? Критерием может служить устойчивость системы к малым возмущениям. Если такая устойчивость отсутствует, детерминированное описание на больших временных интервалах теряет смысл, и необходимо использовать статистические методы. Такой подход привел к необходимости определения хаотического поведения через чувствительную зависимость системы к начальным условиям и использованию показателей Ляпунова и энтропии в качестве критериев динамического хаоса.

Динамика диссипативных систем в определенном смысле более разнообразна, чем динамика консервативных систем. Здесь встречаются такие инвариантные множества, как устойчивые и неустойчивые стационарные точки и предельные циклы, многомерные притягивающие торы, соответствующие устойчивому квазипериодическому поведению с несоизмеримыми частотами, математический образ хаотических колебаний диссипативных систем — странный аттрактор, и др.

Странный аттрактор — это некоторое «сложно устроенное» множество в фазовом пространстве, к которому притягиваются почти все траектории из его некоторой окрестности, а на самом множестве движение имеет экспоненциально неустойчивый характер. Такое сочетание глобального сжатия с локальной неустойчивостью приводит к тому, что аттрактор уже не может быть гладким как, например, тор; он определенным образом расслаивается и представляет собой в некотором сечении канторово множество.

Основная идея публикации [16] (см. также [11, 12]), где впервые было введено понятие странного аттрактора и доказана возможность его существования, состояла в том, что такие подмножества фазового пространства играют определяющую роль в решении проблемы турбулентности. Хотя этот подход в полной мере не оправдался (см. [13, 14]), работа [16] послужила стимулом к развитию теории хаотических динамических систем и их приложений.

Лекции посвящены анализу хаотических явлений, возникающих главным образом в диссипативных системах. Приводятся основные сведения из общей теории, дается определение хаоса и рассматриваются различные типы аттракторов. Кроме того, описаны гиперболические множества, подкова Смейла, гомоклинические касания и связанные с ними экзотические явления — Ω -взрывы и дикие гиперболические множества. Также рассматриваются статистические свойства динамических систем, исследуемых в рамках эргодической теории, и объясняется принципиальное отличие стохастической динамики от детерминированного хаоса.

В настоящее время для изучения свойств сложных систем, в том числе и при экспериментальных исследованиях, широко используется подход, основанный на анализе сигналов, произведенных системой. Это особенно актуально в тех случаях, когда математически описать изучаемый процесс практически невозможно, но в распоряжении исследователей имеется некоторая характерная наблюдаемая величина. Анализ такого подхода составляет содержание последней части.

В основу представлений о детерминированном хаосе положено целое множество направлений современной математики: дифференциальная динамика, теория меры, функциональный анализ, теория особенностей, то-

пология и др. К сожалению, сейчас большинство понятий из этих областей сильно формализованы и зачастую их физический смысл теряется за завесой абстрактных рассуждений, терминов и теорем. Поэтому лекционный курс, в основном, представляет собой качественное изложение теории хаотических динамических систем, где большинство формальных идей сопровождается наглядными примерами.

2 Динамические системы и хаос

Вообще говоря, то, что сейчас называют хаосом, в математике известно с начала XX века. Со времен А. Пуанкаре стало ясно, что при изучении сложного поведения обычный подход типа аналитических вычислений индивидуальных траекторий дифференциальных уравнений не работает. По этой причине основной задачей теории является исследование устойчивости, изучение роли инвариантных многообразий, анализ геометрической структуры траекторий, поиск инвариантных мер, расчет инвариантных характеристик и т.п. Хотя такой подход и не дает возможность представить решение в явном виде, он позволяет *качественно* описывать многие важные особенности динамических систем, в том числе хаотичность. Поэтому в литературе часто используется термин *качественная теория*.

2.1 Общие положения

Предметом исследования качественной теории являются главным образом сосредоточенные системы, описываемые набором обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = v(x, a), \quad (1)$$

где $x(t) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — совокупность динамических переменных, t — время, $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ — векторная функция заданной гладкости r (т.е. класса C^r), определенная в некоторой области $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $v : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, и a — некоторый параметр (или их совокупность). Обычно M называют фазовым пространством системы (1).

Функция v порождает поток $F^t : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $F^t(x)$ — гладкая функция, которая определена для значений t из интервала $T \subseteq \mathbb{R}$, такая, что

$$\left. \frac{d}{dt} F^t \right|_{t=\tau} = v(F^\tau(x))$$

для всех $x \in M$ и $\tau \in T$. При этом F^t обладает групповыми свойствами такими, что F^0 — тождественный оператор и $F^{t_1+t_2} = F^{t_1}(F^{t_2}) \equiv F^{t_1} \circ F^{t_2}$. Следовательно, поток F^t определяет функцию v единственным образом.

Поток F^t иногда называют преобразованием сдвига, поскольку он переводит систему из состояния, в котором она находилась в начальный

момент времени, в состояние в любой другой момент времени. Нетрудно понять, что F^s при $s = -t$ имеет взаимно-обратную функцию той же гладкости C^r , т.е. система обратима во времени.

Геометрически систему уравнений (1) можно интерпретировать как векторное поле, которое каждой точке $x \in M$ ставит в соответствие вектор v . Тогда решение $x(t) = F^t(x(0))$ представляет собой некоторую кривую, которая в каждой точке является касательной к этому векторному полю. Поэтому часто словосочетания «система обыкновенных дифференциальных уравнений» и «векторное поле» используются как синонимы. Система (1) называется автономной, если векторное поле v не зависит явно от времени.

Дифференциальные уравнения удовлетворяют основной теореме локального существования и единственности решений (подробности см., например, в книге [17]). Если задано начальное состояние $x(0) = x_0 \in D$ системы (1), то $F^t(x_0) : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает фазовую траекторию или фазовую кривую исходного дифференциального уравнения (1). В силу единственности решения для каждого начального условия x_0 и любого гладкого векторного поля v имеется единственная фазовая кривая. Это, в частности, означает, что траектории, определяемые системой (1), не могут пересекаться.

Если время t пробегает дискретный ряд значений, т.е. $t \in \mathbb{Z}$, то соответствующую динамическую систему называют каскадом. Для такой системы более привычной является запись $f : M \rightarrow M$,

$$x_{n+1} = f(x_n) , \quad (2)$$

которая задает отображение. При этом последовательность $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(f(x_0)) = f^2(x_0) \equiv f \circ f, \dots$, т.е. $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, будет его траекторией. Каскад f^n , который является C^r -гладким вместе со своим обратным, называется диффеоморфизмом.

В ряде случаев поток F^t допускает глобальную секущую Π , т.е. гиперповерхность размерности $n - 1$, которую фазовые траектории пересекают трансверсально (без касаний). Тогда изучение поведения исходной системы можно свести к анализу отображения $\Phi : \Pi \rightarrow \Pi$, которое называется отображением Пуанкаре. Обратная конструкция, т.е. переход от отобра-

жения к потоку, называется надстройкой.

Одним из ключевых понятий, используемым при изучении динамических систем, является понятие грубости, введенное А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным [18]. Говорят, что векторное поле v динамической системы является грубым (или структурно устойчивым), если имеется окрестность U поля v , такая, что для каждого векторного поля v' из этой окрестности фазовый портрет качественно не отличается от фазового портрета динамической системы, задаваемой полем v . Соответственно, свойство динамической системы грубое, если при малых возмущениях системы оно сохраняется.

Важную роль в происхождении хаоса в динамических системах играют предельные циклы — замкнутые фазовые траектории, отвечающие периодическому поведению.

Пусть $\gamma = x(t)$ — предельный цикл и S — секущая поверхность, которую цикл пересекает в точке p . Выберем некоторую окрестность $U \subset S$ этой точки (рис.1) и рассмотрим первое возвращение траектории, вышедшей из близкой к p точки $q \in U$. Тогда можно определить отображение Пуанкаре $\Phi : U \rightarrow S$, переводящее точку q в точку $q' = \Phi(q)$ на поверхности S .

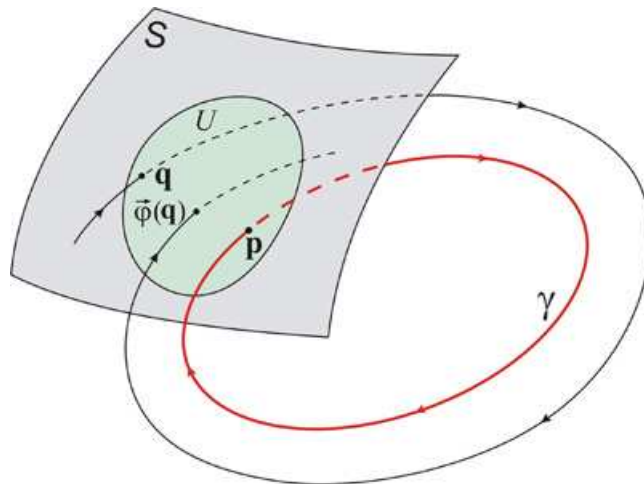


Рис. 1: Отображение Пуанкаре в окрестности предельного цикла.

Очевидно, в координатном представлении в окрестности точки p такое отображение можно записать в виде $y' = \hat{L}y + g(y)$, где \hat{L} — матрица с эле-

ментами $(\partial\varphi_i/\partial y_k)_{y=p}$. Тогда линеаризованное отображение суть $y' = \hat{L}y$. Матрица \hat{L} называется матрицей монодромии², а ее собственные значения α_j , — мультипликаторами. Мультипликаторы могут быть как вещественными, так и комплексными величинами.

Каждому собственному значению \hat{L} отвечает собственный вектор, задающий инвариантное направление. Один из таких векторов всегда будет направлен по касательной вдоль траектории. Поэтому соответствующий ему мультипликатор равен единице.

Когда фазовая траектория вблизи предельного цикла совершает один оборот (см. рис.1), то возмущение, отвечающее каждому собственному вектору, умножается на соответствующий мультипликатор. Поэтому предельный цикл является устойчивым, когда все мультипликаторы, за исключением одного, отвечающего смещению вдоль траектории, лежат на комплексной плоскости внутри единичного круга, т.е. при $|\alpha_j| < 1$. Если же мультипликаторы удовлетворяют условию $|\alpha_j| > 1$, то цикл будет абсолютно неустойчивым.

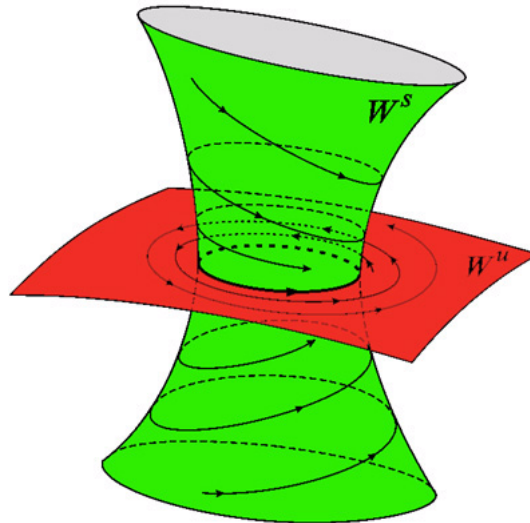


Рис. 2: Устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия седлового предельного цикла.

В общем случае часть мультипликаторов лежат как внутри единичного круга, так и снаружи. Такие предельные циклы называются седловыми.

² Буквально от моно — один и дром — круг, т.е. матрица, полученная через один оборот цикла.

Для седлового предельного цикла характерно наличие устойчивых W^s и неустойчивых W^u многообразий, которые характеризуются тем свойством, что если начальная точка траектории $x_0 \in W^s$ ($x_0 \in W^u$), то при $t \rightarrow \infty$ (соответственно, при $t \rightarrow -\infty$) фазовые кривые будут стремиться к γ (рис.2). Циклы седлового типа являются ключевыми составляющими хаотических динамических систем.

2.2 Аттракторы

Основное свойство диссипативных систем — сжатие фазового объема: с течением времени, согласно динамическим уравнением, первоначальный объем, занимаемый облаком фазовых точек, уменьшается. Формально это выражается в виде неравенства $\operatorname{div} v < 0$. В этом случае при $t \rightarrow \infty$ все фазовые траектории будут сходиться к некоторому подмножеству $\mathcal{A} \subset M$ нулевого (в фазовом пространстве) объема, которое называется аттрактором динамической системы.

В настоящее время имеется несколько определений аттрактора, которые, по-видимому, не сводятся друг к другу (см. обзоры [19–22]). Наглядное определение аттрактора состоит в следующем. Аттрактором называется такое компактное подмножество \mathcal{A} фазового пространства M , которое удовлетворяет следующим условиям [23]:

- а) \mathcal{A} инвариантно относительно потока динамической системы;
- б) существует окрестность U , которая сжимается к \mathcal{A} под действием потока;
- в) \mathcal{A} нельзя разложить на два и более непересекающихся инвариантных подмножества.

Инвариантность аттрактора \mathcal{A} относительно потока означает, что $F^t \mathcal{A} = \mathcal{A}$, т.е. попав на аттрактор, мы остаемся там при любом $t \rightarrow \infty$. Из второго утверждения следует, что \mathcal{A} является таким подмножеством множества U , $\mathcal{A} \subset U \subset M$, что при $t \rightarrow \infty$ выполняется $F^t U \rightarrow \mathcal{A}$. Фактически здесь речь идет об области притяжения аттрактора \mathcal{A} , т.е. совокупности начальных точек $x_0 \in U$ таких, что при $t \rightarrow \infty$ фазовые траектории, начавшиеся в этих точках, стремятся к аттрактору \mathcal{A} . Третье утверждение необходимо для того, чтобы исключить аттракторы, состоящие из нескольких отдельных компонент.

Согласно данному определению, устойчивые положения равновесия, устойчивые предельные циклы и устойчивые торы являются аттракторами, которые называются регулярными или простыми.

2.3 Хаос

В настоящее время существует несколько возможностей ввести понятие хаотичности. Наиболее распространенное и часто используемое определение было предложено в работе [24]. Оно опирается на свойство чрезвычайной (экспоненциально сильной) чувствительности системы к заданию начальных условий или к внешним воздействиям. Это представляется вполне естественным, так как основным проявлением динамического хаоса является экспоненциальное разбегание близких траекторий.

Но для определения понятия хаоса одной экспоненциальной неустойчивости недостаточно. В дополнение к этому необходимо выполнение условия транзитивности и наличия некоторой регулярности, называемой плотностью периодических орбит (т.е. циклов). Часто транзитивность заменяется условием топологического перемешивания, которое является более сильным.

Пусть M — метрическое пространство. Отображение $f : M \rightarrow M$ называется хаотическим [24], если: (а) f обладает неустойчивостью по отношению к заданию начальных условий; (б) f является топологически транзитивным; (в) циклы отображения f плотны в пространстве M .

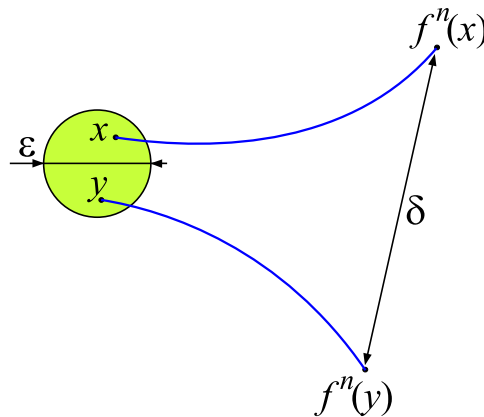


Рис. 3: Геометрическая интерпретация неустойчивости по начальным условиям.

Говорят, что отображение f неустойчиво по начальным условиям, если имеется некоторая величина (постоянная неустойчивости) δ такая, что для некоторой точки $x \in M$ и $\epsilon > 0$ существует точка $y \in M$, для которой $\text{dist}(x, y) < \epsilon$ и $\text{dist}(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где $\text{dist}(\cdot)$ означает расстояние. Геометрическая интерпретация этих соотношений показана на рис.3. Примечательно, что постоянная δ не зависит от x или от ϵ . Она определяется только свойствами рассматриваемой системы.

Далее, отображение f называется транзитивным, если для любых двух открытых множеств U, V найдется такое число n , что $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Неформальный смысл свойства транзитивности демонстрирует рис.4. Заметим, что из теории метрических пространств известно, что транзитивность эквивалентна существованию плотной траектории.

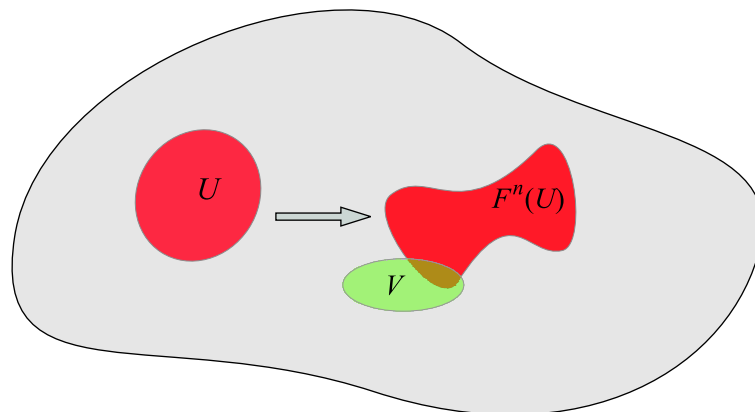


Рис. 4: Пояснение транзитивности.

Наконец, свойство плотности периодических траекторий означает, что в любой окрестности любой точки в M существует по крайней мере одна (и, следовательно, бесконечно много) периодических траекторий.

Таким образом, хаотическая система должна обладать тремя важными свойствами: непредсказуемостью (экспоненциальная неустойчивость), неразложимостью (транзитивность) и элементом регулярности (плотность циклов). Однако не так давно было обнаружено [25], что в приведенном определении условие чувствительной зависимости от начальных условий является избыточным. Следовательно, если отображение непрерывно, выполняется свойство транзитивности, а циклы плотны, то система обладает

чувствительной зависимостью от начальных условий. Немного позже было показано [26], что в определении хаотичности ни транзитивность, ни плотность циклов не следуют из оставшихся двух условий. По-видимому, преобразование, заданное на компактном множестве, может быть определено как хаотическое, если оно обладает чувствительной зависимостью от начальных условий и имеет плотные циклы.

Совсем недавно в работе [27] было предложено определение хаотичности динамической системы, которое, помимо чувствительной зависимости от начальных условий включает также требование сложности траектории. Под сложностью здесь авторы понимают в определенном смысле отсутствие рекуррентности. При этом показано, что из определения хаотичности, основанного на неустойчивости по отношению к начальным условиям, транзитивности и плотности циклов [24], вытекает хаотичность, предложенная авторами [27].

Отметим, что к определению хаоса также можно подойти с более физической точки зрения, используя понятие энтропии и размерности (см. п. 9).

3 Гиперболическая динамика

Гиперболические множества являются хорошим примером для понимания «внутреннего устройства» динамических систем, обладающих хаотическим поведением. Привлекательная особенность гиперболических множеств состоит также и в том, что их исследование позволяет понять глобальное поведение траекторий на основе анализа их локальных свойств.

3.1 Гиперболические множества

Конструкция гиперболических множеств основана на очень простой идее: касательное пространство Σ динамической системы устроено так, что оно складывается из трех подпространств, устойчивого E^s , неустойчивого E^u и нейтрального E^0 . Иными словами, здесь речь идет о линейном векторном пространстве Σ векторов инфинитезимальных возмущений таком, что произвольный вектор возмущения представляется как линейная комбинация векторов, относящихся к подпространствам E^s , E^u и E^0 . Эти подпространства определяются тем, что близкие траектории, соответствующие E^s , экспоненциально сходятся друг к другу при $t \rightarrow \infty$, а E^u — сходятся при $t \rightarrow -\infty$. При этом в подпространстве E^0 векторы сжимаются или растягиваются медленнее, чем с экспоненциальной скоростью. Из такого поведения уравнений в вариациях следует та же динамика траекторий динамических систем.

Рассмотрим систему с дискретным временем, заданную отображением (диффеоморфизмом) (2) и компактное инвариантное множество $\Lambda \subset M$, т.е. $f(\Lambda) = \Lambda$. Для таких преобразований гиперболичность вводится следующим образом [28, 29] (см. также [21, 30, 31] и цитируемую там литературу). Пусть каждая итерация f^n является гладкой в окрестности $x \in M$. Тогда существует дифференциал ∂f_{x_n} диффеоморфизма f отображений касательного пространства Σ_{x_n} в касательное пространство $\Sigma_{f(x_n)}$. Траектория x_n называется гиперболической, если существуют подпространства $E_{f^k(x)}^s$ и $E_{f^k(x)}^u$ касательного пространства $\Sigma_{f^k(x)}$, $0 \leq k < \infty$ такие, что $\Sigma_{f^k(x)} = E_{f^k(x)}^s + E_{f^k(x)}^u$ и

а) $\partial f_{f^k(x)}(E_{f^k(x)}^s) = E_{f^{k+1}(x)}^s$, $\partial f_{f^k(x)}(E_{f^k(x)}^u) = E_{f^{k+1}(x)}^u$;

б) $\|\partial f_{f^k(x)} e\| \leq c \|e\|$, $e \in E_{f^k(x)}^s$, $\|\partial f_{f^k(x)} e\| \geq c^{-1} \|e\|$, $e \in E_{f^k(x)}^u$, где $0 < c <$

1 — некоторая постоянная;

в) $\text{dist}(E_{f^k(x)}^s, E_{f^k(x)}^u) \geq \text{const}$, $0 < k < \infty$.

Разложимость касательного пространства Σ означает, что каждый вектор v единственным образом можно представить как $v = v^s + v^u$, где $v^s \in E^s$ и $v^u \in E^u$. Из соотношения а) следует инвариантность подпространств E^u и E^s , а условие б) означает гиперболичность. Наконец, последнее неравенство указывает на свойства E^u и E^s . Понятие гиперболичности естественно вводится и для потоков.

Множество Λ называется гиперболическим, если оно замкнуто и состоит из траекторий, удовлетворяющих условиям гиперболичности. Если вдоль траектории (т.е. с ростом итераций) оценки б) ухудшаются, т.е. степень сжатия и растяжения в подпространствах E^u и E^s меняется от точки к точке, то такие множества называются неравномерно гиперболическими. Динамические системы с равномерной гиперболичностью всех траекторий называются системами Аносова [31].

Одним из ключевых результатов в этом направлении, который также очень важен в приложениях, является теорема Адамара–Перрона или теорема о локальных многообразиях, согласно которой у гиперболической траектории γ существует локальное устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразие (рис.5а). Фазовые кривые динамической системы на многообразии W^u экспоненциально разбегаются, а на многообразии W^s экспоненциально сближаются. В сечении такой гиперболической траектории будет отвечать гиперболическая (седловая) точка \mathcal{H} (рис.5б).

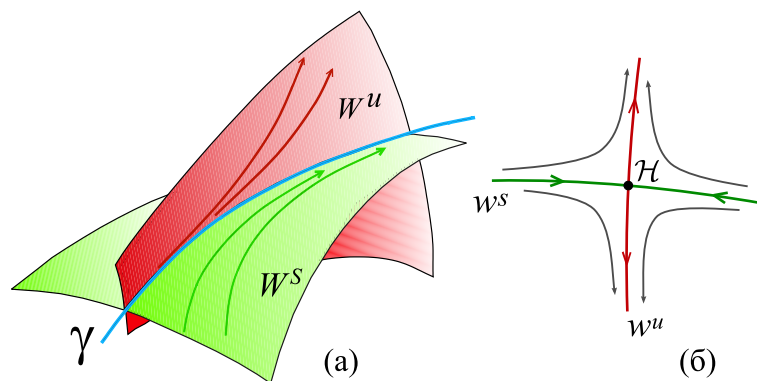


Рис. 5: Гиперболическая траектория γ и гиперболическая неподвижная точка \mathcal{H} .

Установить гиперболичность исследуемого множества, как правило, очень сложно. В приложениях для проверки свойства гиперболичности удобным оказывается так называемое условие конусов (см. [30] и приведенные там ссылки). В частности, используя это условие была обоснована гиперболическая природа аттракторов Смейла–Вильямса и Плыкина в физически реализуемых системах [32–34] (см. п. 5.2), а также найдено доказательство существования известного аттрактора Лоренца [35, 36] (см. п. 5.3).

3.2 Подкова Смейла

Одним из замечательных примеров гиперболического множества является подкова Смейла. С исследований этого примера началась современная теория хаотических динамических систем (см. об этом [37, 38]). В настоящее время подкова хорошо изучена, и поэтому мы приведем лишь основные элементы ее построения на примере обратимого отображения плоскости. Его можно рассматривать как отображение Пуанкаре для некоторого трехмерного потока.

Рассмотрим единичный квадрат на плоскости $S = [0, 1] \times [0, 1]$. Введем отображение $f : S \rightarrow \mathbb{R}^2$, которое действует так, что $f(S) \cap S \equiv \Omega_d^1$ образует две прямоугольные полосы Q_1 и Q_2 . При этом горизонтальные границы AB, DC преобразуются в горизонтальные (рис.6). Прообразами этих полос являются две горизонтальные полосы $B_i = f^{-1}(Q_i)$, $i = 1, 2$.

Это построение соответствует растяжению исходного квадрата с некоторым коэффициентом α по вертикали, сжатию его по горизонтали с коэффициентом β и сложению в форме подковы так, что область изгиба не попала в S . Следующая итерация отображения $f(Q_i)$ приводит к появлению множества $\Omega_d^2 = S \cap f(S) \cap f^2(S)$, состоящего из четырех более тонких вертикальных полос (рис.6). Обратные итерации дают четыре горизонтальные полосы $\Omega_r^2 = S \cap f^{-1}(S) \cap f^{-2}(S)$. После m итераций получим множества

$$\Omega_d^m = \bigcap_{k=0}^m f^k(S), \quad \Omega_r^m = \bigcap_{k=0}^m f^{-k}(S),$$

состоящие из 2^m вертикальных и горизонтальных полос, соответственно. Таким образом, предельные множества Ω_d^∞ и Ω_r^∞ будут включать

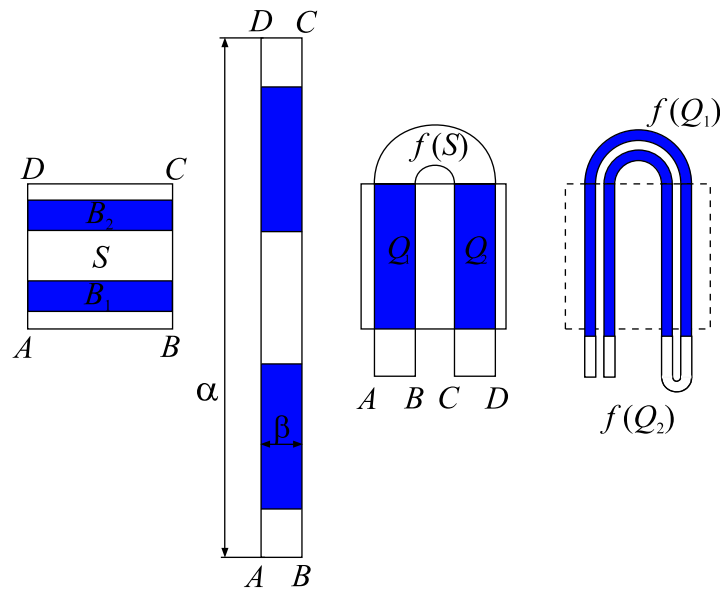


Рис. 6: Подкова Смейла.

несчетное множество линий, представляющих собой произведение канторова множества на отрезок. Очевидно, описанную конструкцию можно варьировать разными способами.

Из построения подковы нетрудно видеть, что с итерациями большинство точек покидают квадрат S . Более того, почти все точки не будут содержаться также и в образе $f^k(S)$. Точки p , которые всегда остаются в S , образуют нетривиальное инвариантное подмножество $\Omega = \{p \mid f^k(p) \in S, -\infty < k < \infty\} = \Omega_d^\infty \cap \Omega_r^\infty = \bigcap_{k=-\infty}^{+\infty} f^k(S)$, которое имеет нулевую меру и сложную топологическую структуру. Это множество называется подковой Смейла, хотя, как заметил академик Д.В.Аносов [31], на подкову похоже вовсе не оно, а фигурирующее в его построении множество $f(S)$.

Известно, что Ω содержит бесконечные семейства седловых циклов всевозможных периодов, некоторую плотную траекторию, а также несчетное множество непериодических движений. Поэтому присутствие подковы обычно трактуется как проявление системой определенных хаотических свойств.

Подкова Смейла может сосуществовать с аттракторами. Но само это множество не является притягивающим. Поэтому динамические системы,

имеющие в фазовом пространстве подкову, могут демонстрировать переходное (иногда очень длительное) хаотическое поведение, которое заканчивается затягиванием траектории на некоторый устойчивый цикл или в стационарную точку. Характерный пример — известное уравнение Дуффинга при определенных значениях параметра [39] (подробнее об этой системе см. [40]).

Из существования подковы следует неожиданный вывод, очень важный для физических приложений: сложные множества нулевой меры типа подковы, которые рождаются в фазовом пространстве и которыми при исследовании обычно пренебрегают, могут оказывать драматическое влияние на поведение динамической системы (см. п.6). Обсуждение этих вопросов на примере широкого спектра явлений можно найти в недавней монографии Г. Заславского [41].

В физических системах подкова Смейла возникает достаточно часто, например в небесной механике [42] (см. также [43]), в результате трансверсального пересечения многообразий в уравнениях Ван дер Поля [44] и Дуффинга [39], в модели подскакивающего мяча [45] и др. (см. [29, 46]). Эти результаты выявили всю сложность динамики, которую могут демонстрировать на первый взгляд очень простые системы.

4 Гомоклинические структуры

К гиперболическим множествам относятся также инвариантные множества в окрестности гомоклинических и гетероклинических траекторий. Такие траектории были открыты Пуанкаре при изучении задачи N тел (см. [47]). Они встречаются как в консервативных, так и в диссипативных системах, и в настоящее время их исследование составляет самостоятельный раздел нелинейной динамики [48].

4.1 Гомоклинические траектории

Чтобы получить первоначальное представление о поведении систем, которым присущи гомоклинические и гетероклинические структуры, рассмотрим для наглядности трехмерную ($n = 3$) динамическую систему (1). Допустим, что эта система имеет седловой предельный цикл γ с устойчивым W^s и неустойчивым W^u многообразиями. Предположим, что γ имеет двоякоасимптотическую траекторию $\Gamma = W^s \cap W^u$, т.е. $\Gamma \rightarrow \gamma$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Фрагмент такой структуры показан на рис.7. Если многообразия W^s и W^u пересекаются по Γ трансверсально (рис.7а), то говорят, что возникает грубая гомоклиническая траектория Γ . Когда имеет место касание многообразий по кривой Γ (т.е. гомоклиническое касание, рис.7б), то гомоклиническая траектория Γ_0 называется негрубой.

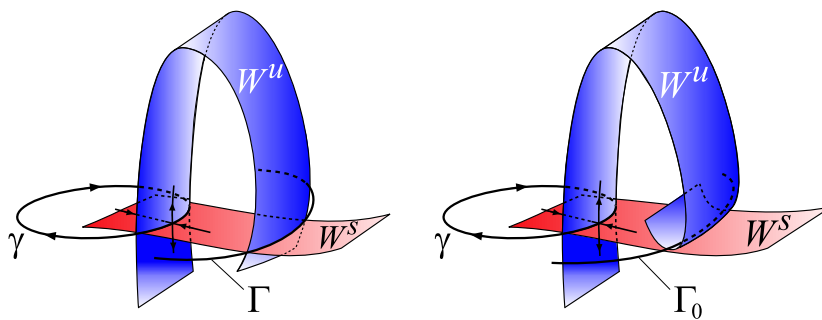


Рис. 7: Грубая Γ и негрубая Γ_0 гомоклинические траектории седлового цикла γ .

На рис.8 для наглядности показана эволюция устойчивого и неустойчивого многообразий, которые начинают пересекаться, образуя грубую гомоклиническую траекторию.

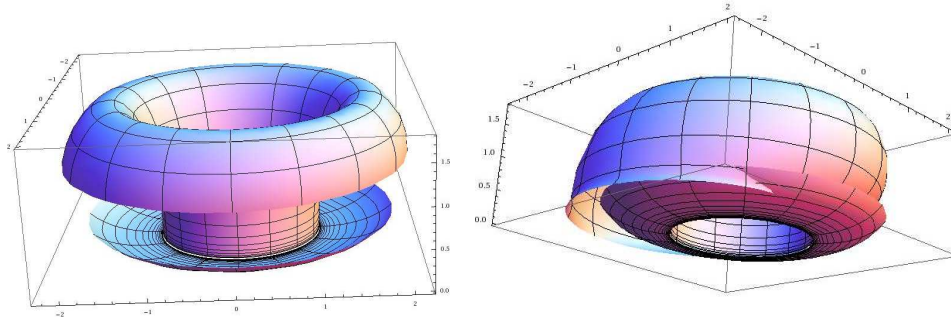


Рис. 8: Пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий.

Сама двоякоасимптотическая траектория получается при $t \rightarrow \pm\infty$. Ее фрагмент показан на рис.9.

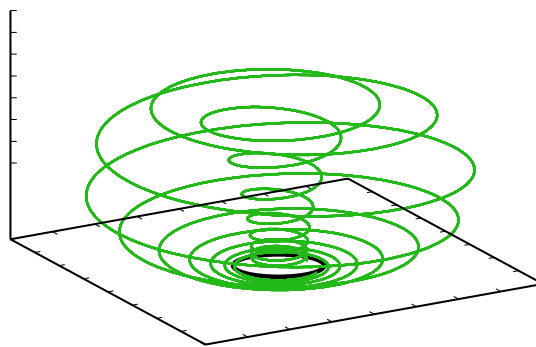


Рис. 9: Пересечение устойчивого и неустойчивого многообразий.

Хорошо известно, что из наличия одной гомоклинической траектории следует существование бесконечного их числа (наглядное объяснение этого феномена см. в [15]). Фрагмент похожей структуры в случае трансверсального пересечения показан на рис.10а. В отображении Пуанкаре замкнутая гиперболическая траектория (седловой цикл) γ отвечает гиперболической точке \mathcal{H} . Многообразия этой точки одномерны и соответствуют устойчивой $w^s(\mathcal{H})$ и неустойчивой $w^u(\mathcal{H})$ ветвями сепаратрис (рис.10б). Пересечение w^s и w^u означает наличие трансверсальной гомоклинической точки q_0 . Траектория такой точки определяется как бесконечное множество пересечений: $\mathcal{Q} = \{q_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, $q_{i+1} = f(q_i)$.

Гомоклинические точки соединяются петлями, которые отображают

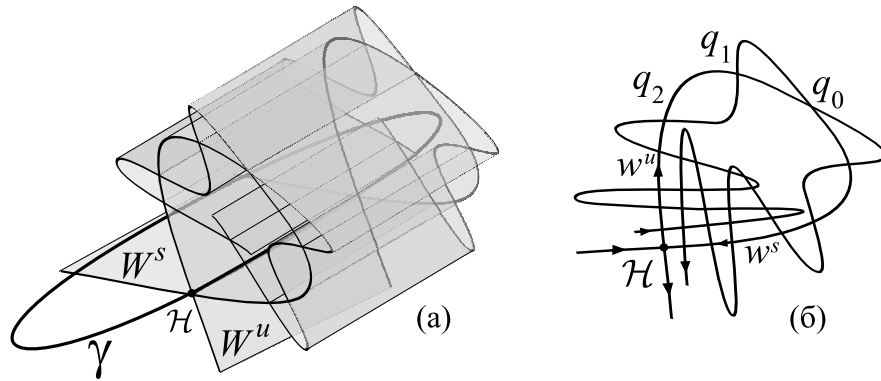


Рис. 10: Инвариантные многообразия в окрестности гиперболического цикла и соответствующее отображение Пуанкаре.

ся посредством f друг в друга. Поскольку петли охватывают одинаковые площади, а устойчивое и неустойчивое многообразия не имеют самопересечений, то с итерациями отображения эти петли все больше и больше вытягиваются. Таким образом, в фазовом пространстве мы получаем решетку из ветвей сепаратрисы (рис.10б). В физической литературе такие области называют стохастическими слоями или гомоклическими сплетениями.

Рассмотрим множество \mathbf{U} , состоящее из таких пересечений и точки \mathcal{H} , а также окрестностей U_0, U_1, \dots, U_k , которые выбираются следующим образом. Пусть U_0 — окрестность гомоклической точки q , в которую входят и некоторые точки $f^k(q)$, исключая некоторое их конечное число. Остальные точки из гомоклической решетки покрываются оставшимися попарно непересекающимися окрестностями U_1, \dots, U_k . Тогда можно показать [43] (см. также [49]), что для всякой окрестности V множества \mathbf{U} найдется система областей $U_i \subset V, i = 0, 1, 2, \dots$, для которой

$$\Lambda = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} f^i \left(\bigcup_{j=1}^k U_j \right)$$

является гиперболическим инвариантным множеством. Это означает, что множество Λ состоит из таких гиперболических точек y , которые при действии отображения $f^k(y), -\infty < k < \infty$, остаются в окрестности V . С уменьшением V множество Λ стремится к \mathbf{U} .

Гомоклические точки (траектории) можно рассматривать как част-

ный случай гетероклинических точек (траекторий), которые возникают при пересечении устойчивой и неустойчивой ветвей сепаратрис (многообразий) от разных гиперболических точек. Для них справедливы аналогичные результаты, полученные для гомоклинических точек (траекторий) [30, 48].

4.2 Рождение подков из гомоклинической картины

С гомоклиническими и гетероклиническими сплетениями тесно связана подкова Смейла. Эту связь наглядно демонстрирует следующее построение. Рассмотрим малую окрестность U гиперболической точки \mathcal{H} . Действие отображения f приводит к тому, что найдутся такие m, n , что $q \in f^k(U)$ при $k \geq m$ и $q \in f^{-l}(U)$ при $l \geq n$. Это означает, что область U растягивается вдоль неустойчивого направления w^u , образуя некоторую полосу $S = f^m(U)$, которая включает гомоклиническую точку q . С другой стороны, некоторая окрестность B , обрамляющая устойчивое направление w^s и точку q при обратных итерациях переходит в область U , $B = f^{-n}(U)$ (рис.11). Следовательно, образом полосы B через $n + m$ итераций будет изогнутая в виде подковы полоса $S = f^{m+n}(B)$ и пересекающая B .

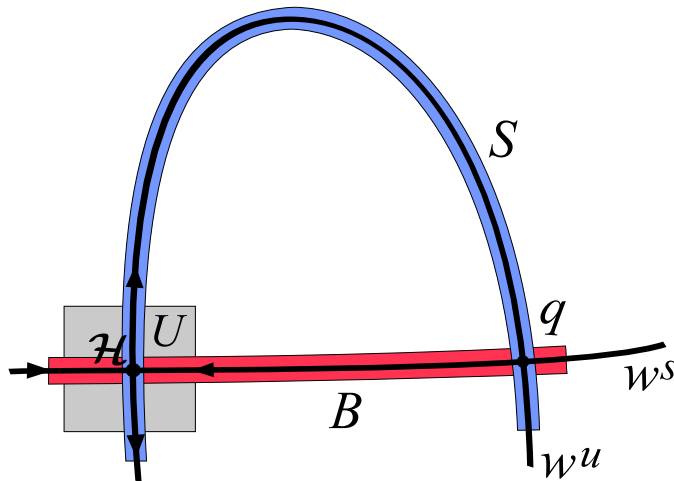


Рис. 11: Рождение подковы из гомоклинической структуры.

Следующие итерации приводят к еще большему вытягиванию и новым пересечениям $B \cap f^l(B)$. Эта конструкция аналогична построению подковы Смейла (рис.6), только теперь вместо исходного квадрата S рассматрива-

ется криволинейный прямоугольник B . Таким образом, мы пришли к важному результату, который впервые был получен Биркгофом [50,51] и позже строго обоснован Смейлом [2]: если диффеоморфизм $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ имеет гиперболическую неподвижную точку \mathcal{H} и трансверсальную гомоклиническую точку q , то в любой малой окрестности \mathcal{H} для некоторой итерации отображения f существует подкова. Верно и обратное утверждение: если в динамических системах присутствуют подковы, то имеется также и гомоклиническая структура.

Существует важное следствие, вытекающее из результата Смейла–Биркгофа: наличие трансверсальной гомоклинической точки влечет положительность энтропии динамической системы (см. п. 7.2). Обратное утверждение для отображений плоскости [52] и для потоков [31] тоже верно. Это в том числе означает, что для появления хаотичности в системе достаточно рождения подков (см. п. 9). При этом, однако, надо помнить, что хаотическое множество может оказаться непритягивающим.

Среди динамических систем, имеющих гомоклинические структуры, важное место занимают такие, фазовое пространство которых содержит петлю состояния равновесия типа седло–фокус (рис.??а). Системы с гомоклиническими петлями негрубые. Поэтому при возмущениях петли расщепляются, что может приводить к рождению очень сложной динамики.

Впервые анализ систем с двоякоасимптотическими траекториями типа седло–фокус был выполнен Шильниковым [6, 48, 53]. Он показал, что в полной окрестности значений параметра, при котором наблюдается петля седло–фокуса, имеются подковы Смейла. Кроме того, здесь существуют системы с гомоклиническими касаниями (см. п. 4.3) и системы, имеющие счетное множество устойчивых циклов³.

Рассмотрим трехмерное векторное поле, имеющее в начале координат стационарную точку O с одним действительным положительным собственным значением $\rho > 0$ и двумя комплексно–сопряженными $\lambda_{1,2} = \eta \pm i\zeta$. Это означает, что стационарная точка имеет структуру типа седло–фокус с двумерным локально устойчивым многообразием W^s и одномерным неустойчивым многообразием W^u . Предположим, что сепаратрисы сед-

³ Как заметил И. М. Овсянников, который был одним из учеников Л. П. Шильникова, седло–фокус неисчерпаем так же как и электрон.

ла образуют гомоклиническую петлю Γ (рис.12). Теорема Шильникова утверждает, что если $\rho > |\eta|$, то возмущенное векторное поле имеет инвариантные гиперболические множества, а отображение Пуанкаре — счетное множество подков. При этом в любой окрестности петли Γ существует бесконечное множество седловых предельных циклов.

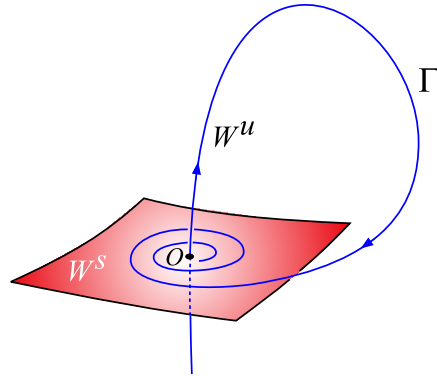


Рис. 12: Седло–фокус

Рождение подковы из петли седло–фокуса нетрудно понять при помощи следующего геометрического построения. Рассмотрим окрестность U точки O в виде цилиндра, который задается как пересечение двух поверхностей S_0 и S_1 (см. рис.13). Устойчивое многообразие W^s делит эту окрестность на две части: U^+ и $U \setminus U^+$. Обозначим точку пересечения неустойчивого многообразия W^u с поверхностью S_0 как p , а точку пересечения с поверхностью S_1 — через q .

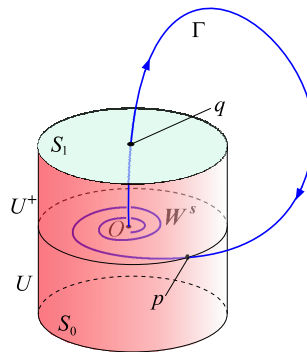


Рис. 13: Окрестность седло–фокуса.

Если окрестность U^+ достаточно мала, то существует отображение ψ :

$S_0 \rightarrow S_1$, которое ставит в соответствие каждой точке на S_0 определенную точку на поверхности S_1 (рис.13).

В частности, это отображение преобразует площадку $D \subset S_0$ в логарифмическую «толстую» спираль $D_1 \subset S_1$ с центром в точке q , т.е. $\psi(D) = D_1$. Иными словами, горизонтальные полосы на D отображаются на полосы, лежащие внутри двух спиралей, принадлежащих S_1 и закручивающихся вокруг точки q , а сама точка q является образом линии пересечения D и W^s (рис.14).

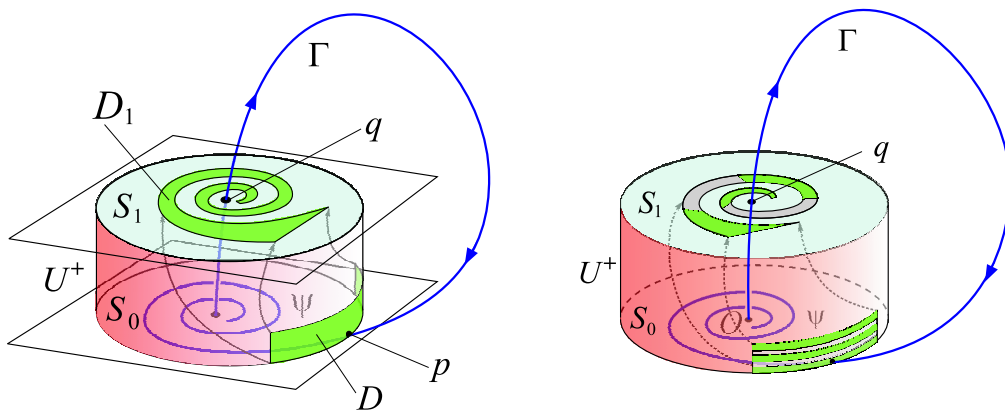
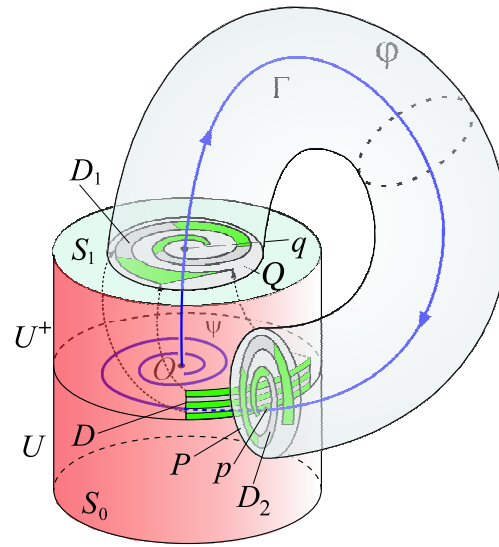


Рис. 14: Преобразование области $D \subset S_0$.

Поскольку поток от q к p невырожден, то существует диффеоморфизм φ окрестности Q точки q в окрестность P точки p , $\varphi : Q \rightarrow P$. При этом область D_1 отобразится в некоторую область D_2 на поверхности S_0 и $\varphi(q) = p$. Таким образом, отображение первого возвращения можно определить как $\varphi(\psi)$.

Действие этого отображения состоит в том, что исходная площадка D преобразуется в закрученную в форме спирали полосу D_1 , которая затем отображается в D_2 и некоторым образом накладывается на D (см. рис.15). В итоге $\varphi(\psi(D)) \cap D$ представляет собой множество, которое по построению аналогично конструкции подковы Смейла.

Более полное рассмотрение и строгий анализ описанного построения представлен в монографии [48] (см. также цитируемую там литературу). В других исследованиях [54, 55] приводятся примеры систем дифференциальных уравнений, имеющих физическую трактовку, для которых результаты Шильникова допускают прямую проверку.

Рис. 15: Преобразование D в образ D_2 .

4.3 Гомоклинические касания и дикie гиперболические множества

Динамические системы с гомоклиническими касаниями устойчивых и неустойчивых многообразий седловых циклов, которые упоминались в п.4.1, могут проявлять ряд новых неожиданных свойств и, как следствие, обладать дополнительной сложностью траекторий. Это связано с так называемой «неизолированностью касаний», которое объясняется тем, что системы с гомоклиническими касаниями плотны в пространстве динамических систем и образуют целые области, которые называются областями Ньюхауса.

Впервые гомоклинические касания были описаны в работах [56,57] (см. также [22, 58]), где изучались основные бифуркации, связанные с существованием негрубой гомоклинической кривой, приводящие к сложному поведению.

Пусть седловой цикл γ устроен так, что его устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия касаются по некоторой гомоклинической кривой Γ_0 (рис.7б). В зависимости от геометрии и от знаков мультипликаторов цикла, в такой системе возможны несколько различных типов гомоклинических касаний. Часть из них сводится друг к другу, однако несводимые комбинации могут быть только трех разных классов [58]. При этом для

каждого из них структура множества Δ траекторий, находящихся в малой окрестности негрубой кривой Γ_0 , может быть качественно различной.

Рассмотрим отображение Пуанкаре в окрестности цикла γ . Допустим, что $f(x, a)$ — сжимающее объем однопараметрическое семейство гладких диффеоморфизмов $f(x, a)$ плоскости \mathbb{R}^2 , имеющее гиперболическую неподвижную точку \mathcal{H} с собственными значениями ρ и σ , $0 < |\rho| < 1 < |\sigma|$, $|\rho\sigma| \neq 1$. Допустим, что при $a = 0$ семейство $f(x, a)$ имеет негрубую гомоклиническую траекторию \mathcal{Q}_0 , в точках которой устойчивое $w^s(\mathcal{H})$ и неустойчивое $w^u(\mathcal{H})$ многообразия имеют квадратичное касание, т.е. в локальных координатах $w^s = x$, а w^u задается как $a - x^2$ (или $a + x^2$).

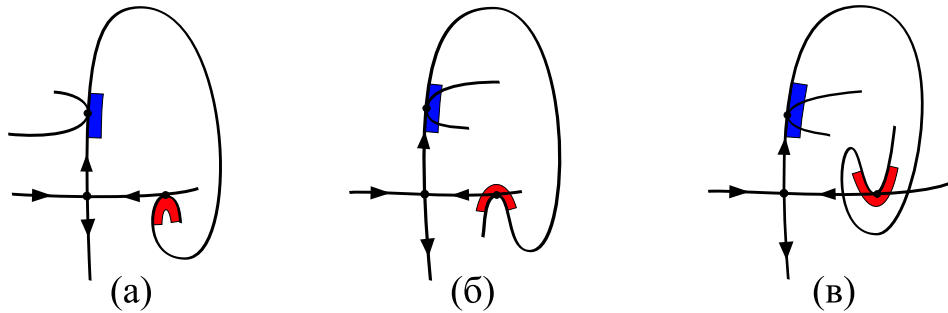


Рис. 16: Гомоклинические касания первого (а), (б) и второго (в) классов.

Если неустойчивая ветвь $w^u(\mathcal{H})$ подходит к устойчивой $w^s(\mathcal{H})$ так, что касание происходит «снизу» (рис.16а,б), то такая структура называется касанием первого класса. В этом случае множество Δ включает саму гомоклиническую траекторию \mathcal{Q}_0 и точку \mathcal{H} . Диффеоморфизмы с таким типом касаний интересны тем, что они отвечают границам в пространстве параметров, которые отделяют области, содержащие системы с простым поведением траекторий от областей с системами, обладающими хаосом. При переходе через такую границу сложная динамика возникает моментально, т.е. взрывным образом. Поэтому это явление получило название Ω -взрыв. Оно было открыто в работах [59, 60] (см. также [61]) и обобщено в исследованиях [62–65].

При подходе сепаратрисной ветви «сверху», как показано на рис.16в, имеет место касание второго класса. Множество Δ в системах такого типа имеет неравномерную гиперболическую структуру, т.е. все траектории, кроме \mathcal{Q}_0 — гиперболические.

Когда диффеоморфизм $f(x, a)$ устроен так, что участки кривых $w^u(\mathcal{H})$ и $w^s(\mathcal{H})$ касаются как показано на рис.17а, то такие касания относятся к третьему классу. В этом случае множество Δ содержит нетривиальные гиперболические подмножества и, следовательно, системы такого типа обладают хаотической динамикой. При этом оказывается, что касания третьего класса существуют в окрестности любой системы с гомоклиническим касанием.

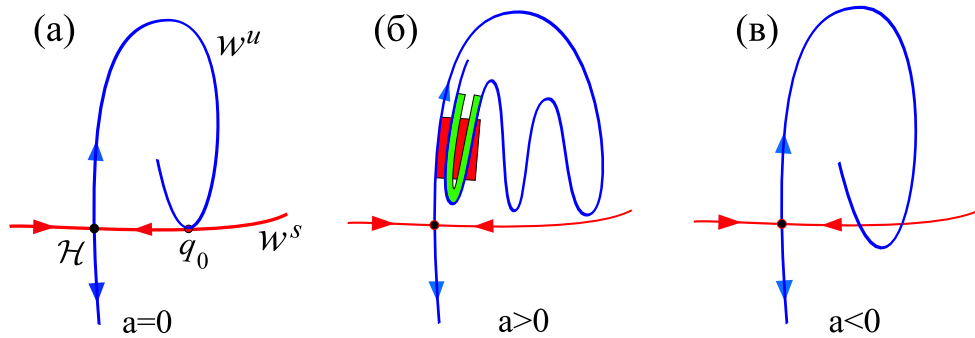


Рис. 17: Перестройка многообразий диффеоморфизма $f(x, a)$ в \mathbb{R}^2 .

Рождение сложной динамики в таких системах вытекает из следующего качественного анализа [21]. Предположим, что гомоклиническое касание происходит при $a = 0$ (рис.17а). Рассмотрим прямоугольную область U , содержащую на границе точку касания q_0 устойчивого $w^s(\mathcal{H})$ и неустойчивого $w^u(\mathcal{H})$ многообразий (рис.18а). Действие отображения f приводит к тому, что для некоторого k точка $f^k(q_0)$ будет принадлежать $w^s(\mathcal{H})$. Тогда нетрудно видеть, что последовательные итерации $f^{i+k}(U)$ для достаточно больших i приведут к пересечению с U и к рождению подковы (рис.18б).

Как показано в работах [56, 57], в некоторых других случаях касаний подкова не возникает до тех пор, пока под действием возмущений не появятся трансверсальные гомоклинические точки. Этот результат поясняет рис.16, где показана эволюция полуокрестности гомоклинического касания под действием преобразования f .

При возмущении семейства $f(x, a)$ касания исчезают или появляются пересечения многообразий, и тогда в поведении диффеоморфизма происходит качественная перестройка. Именно, если $a > 0$, то касания отсут-

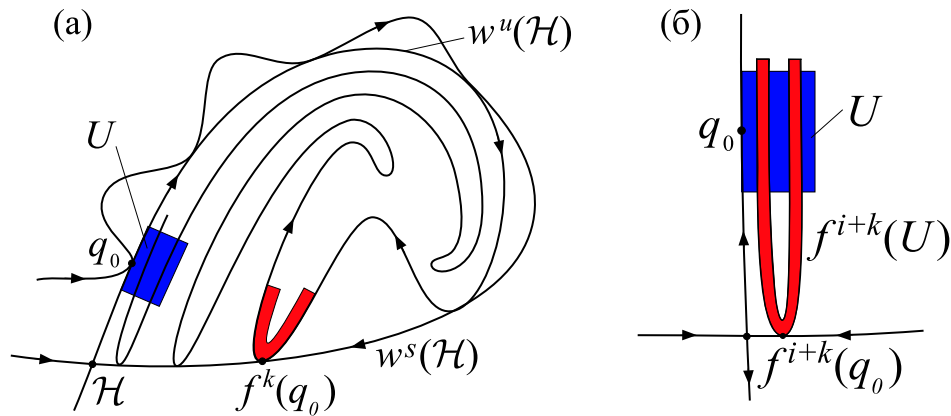


Рис. 18: Рождение подковы из гомоклинического касания.

ствуют (рис.17б), и подковы при последовательных итерациях отображения исчезают. Однако легко понять, что при достаточно малых положительных a , т.е. еще до момента касания в системе будет иметь место очень сложная структура. При $a < 0$ отображение имеет трансверсальную гомоклиническую точку вблизи $f^k(q_0)$ и, как следствие, подкову.

Хотя рассмотренные системы обладают высокой степенью сложности, в описанной ситуации существуют эффекты, которые имеют более тонкую природу. Они связаны с рождением так называемых диких гиперболических множеств, впервые описанных в работах Ньюхауса [66–68]. Так обозначаются равномерно гиперболические множества, устойчивое и неустойчивое многообразия которых имеют квадратичное касание, но это касание не устранимо посредством малых гладких возмущений. Точнее, индивидуальные гомоклинические касания исчезают при слабых шевелениях системы, но в целом таким образом избавиться от них не получится, т.к. неизбежно возникают новые касания.

Это довольно неожиданный результат, который в определенном смысле противоречит представлению о том, что если касание происходит в какой-либо точке, то вследствие структурной неустойчивости оно должно исчезнуть под действием возмущений (см. рис. 17). Однако такая наивная точка зрения неверна. В этом случае для общих семейств отображений $f(x, a)$ существуют интервалы, где плотны значения параметра a , при которых $f(x, a)$ имеет гомоклинические касания.

Чтобы показать, в каком смысле определенные типы касания обладают

«устойчивостью», рассмотрим на плоскости гиперболическое инвариантное множество Λ , которое задается диффеоморфизмом $f(x, a)$. Из примера подковы Смейла п.3.2 следует, что для такого множества устойчивое и неустойчивое многообразия представляют собой произведение канторов множества на отрезок. Допустим, что имеет место квадратичное касание устойчивого $w^s(\Lambda)$ и неустойчивого $w^u(\Lambda)$ многообразий. В его окрестности $w^s(\Lambda)$ и $w^u(\Lambda)$ являются канторовскими множествами горизонтальных отрезков и парабол (рис.19). Обозначим как L кривую, проходящую через вершины парабол. На этой кривой существуют канторовские множества $K_s = w^s(\Lambda) \cap L$ и $K_u = w^u(\Lambda) \cap L$. Если существует точка $q_0 = K_s \cap K_u$, то она будет точкой касания многообразий $w^s(\Lambda)$ и $w^u(\Lambda)$.

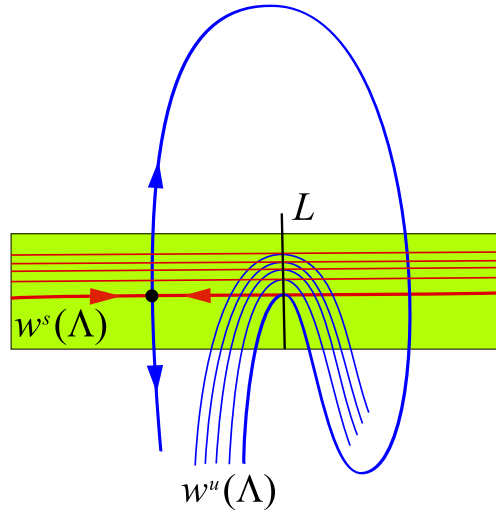


Рис. 19: Касание многообразий канторовского множества.

Чтобы определить возможность пересечения K_s и K_u , в работе [66] была использована метрическая характеристика канторовского множества — его «толщина» $d(K)$. Для канторова множества на отрезке это понятие характеризует отношение длин интервалов, которые в процессе построения выбрасываются, к длинам остающихся промежутков. Как доказано в работе [66], если K_1, K_2 — два канторовых множества, которые удовлетворяют неравенству $d(K_1)d(K_2) > 1$, то (при некоторых дополнительных условиях) $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$. Это означает, что проблема доказательства касаний, которые не исчезают при возмущениях, может быть сведена к построению канторовских множеств, имеющих конечную толщину. Существование та-

ких множеств и были доказаны в статье [66].

Позже, адаптируя такой подход к динамическим системам, в работе [68] было доказано, что в пространстве гладких динамических систем существуют открытые области, где плотны системы с гомоклиническими касаниями. Они называются областями Ньюхауса. Сами инвариантные гиперболические множества вблизи Λ , содержащие касания, называются дикими гиперболическими множествами.

Динамика систем с гомоклиническими касаниями экстремально сложна. Так, в работах [67] (см. также [69]) было доказано, что в областях Ньюхауса плотны системы, имеющие бесконечно много устойчивых циклов. У систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями было обнаружено счетное множество седловых, устойчивых и абсолютно неустойчивых циклов [70]. Более того, такие системы могут иметь одновременно счетное множество устойчивых и неустойчивых инвариантных торов, сосуществующих со счетным множеством седловых, устойчивых и абсолютно неустойчивых циклов [71].

В исследованиях [72] найдено, что при гладких возмущениях систем с гомоклиническими касаниями могут рождаться как гомоклинические касания, так и циклы произвольно высоких порядков вырождения. Эти вырождения связаны с тем, что один из мультипликаторов становится равным $+1$ (или -1) и обращением в нуль некоторого числа (или вообще всех) ляпуновских величин. Один из фундаментальных выводов, который отсюда следует и который оказал большое влияние на нелинейную динамику в целом, — это результат о невозможности полного качественного описания моделей со сложным поведением в рамках конечно-параметрического семейства динамических систем [69, 73, 74]. Кроме того, ряд динамических свойств, которые казались экзотическими, наоборот, являются типичными для систем с гомоклиническими касаниями [75, 76].

Таким образом, негрубые гомоклинические траектории никогда не бывают изолированными. Более того, если гомоклинические касания случаются в детерминированных системах, то они являются источником дополнительной динамической сложности и влекут существенные перестройки в поведении систем.

Несмотря на некоторую абстракцию, гомоклинические касания и об-

ласти Ньюхауса были найдены во многих, в том числе и физических системах. Так, они встречаются в семействах двумерных отображений, демонстрирующих переход к хаосу через удвоение периода [72], в системах типа Лоренца [77] и Дуффинга [21], при разрушении квазипериодического движения [78, 79] и системах, содержащих гомоклиническую петлю типа седло-фокус [53, 80, 81] (см. рис.??) и др.

Наиболее полная информация о гомоклинических касаниях, областях Ньюхауса и смежных с ними явлениях представлена в сборнике [58] и монографии [82].

4.4 Символическая динамика

Конструкция типа подковы, предложенная Смейлом для доказательства гиперболичности в окрестности грубой гомоклинической траектории, оказывается недостаточно универсальной. Например, она не может быть адаптирована к широкому классу гамильтоновых систем. Кроме того, используя такой подход, невозможно обосновать гипотезу Биркгофа [51] (известную как проблема Пуанкаре–Биркгофа), утверждающую, что двумерный сохраняющий площадь диффеоморфизм в любой окрестности замыкания гомоклинической траектории содержит счетное множество периодических орбит.

В свое время Биркгофом было высказано предположение, что для доказательства данного утверждения можно применить методы так называемой символической динамики, когда вместо траектории системы рассматривается последовательность, соответствующая областям фазового пространства, которые посещает эта траектория. При этом каждая траектория кодируется посредством некоторого конечного или счетного алфавита в бесконечную последовательность. Иными словами, исходная траектория оказывается сопряженной с со сдвигом в пространстве полученных последовательностей. Несмотря на некоторую необычность такого подхода, он оказывается весьма продуктивным и позволяет, например, доказать ряд важных утверждений, касающихся гиперболичности динамических систем, сложности динамики в задаче трех тел и других [43].

Проблему Пуанкаре–Биркгофа полностью удалось решить Шильникову [83], который в своем доказательстве как раз и использовал возможность

кодирования траекторий, лежащих в окрестности гомоклинической кривой. Невозможно представить, каким образом такую сложную динамику можно было бы описать аналитически, используя традиционные подходы.

Простейшим примером символической системы служит так называемая топологическая схема Бернулли из двух символов. Рассмотрим некоторое множество \mathcal{X} , элементами которого являются бесконечные в обе стороны последовательности $\mathbf{a} = \{a_i\}_{i=-\infty}^{\infty}$, составленные только из двух символов 0 и 1. Если ввести метрику $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta_k 2^{|m|}$, где $\delta_k = 0$ при $a_i = b_i$ и $\delta_k = 1$, если $a_i \neq b_i$, то \mathcal{X} будет компактом. Определим теперь отображение $g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ как сдвиг на один символ, т.е. $g(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, где $b_n = a_{n+1}$. Построенное таким образом отображение, которое можно называть отображением сдвига, будет удовлетворять определению хаотичности (см. п.2.3).

Теперь можно доказать, что между подковой Смейла Ω и множеством \mathcal{X} существует взаимно однозначное соответствие φ такое что последовательность $\mathbf{b} = \varphi(f(p))$ получается из последовательности $\mathbf{a} = \varphi(p)$ посредством сдвига на один символ $b_k = a_{k+1}$. Действительно, $\varphi(p) = \{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, где $f^k(p) \in B_{a_k}$. Это означает, что точка p лежит в Ω только тогда, когда при всех k выполняется $f \in B_1 \cup B_2$ (см. рис.6). Поскольку $f^{k+1}(p) = f^k(f(p))$, то из $\varphi(x)$ получится $\varphi(f(p))$ при помощи сдвига индексов.

Таким образом, получаем, что $\varphi \circ f|_{\Omega} = g \circ \varphi$. Это означает, что имеется топологическое сопряжение между $f|_{\Omega}$ и g . Иначе говоря, из $f|_{\Omega} = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ приходим к соотношению $f^k|_{\Omega} = \varphi^{-1} \circ g^k \circ \varphi$. Следовательно, существует преобразование φ траекторий f на Ω в траектории g на \mathcal{X} .

Для анализа систем с гомоклиническими и гетероклиническими траекториями посредством символического подхода используются более сложные построения (см. [21, 30, 43]). Основные положения символической динамики представлены в монографии [84].

5 Хаотические аттракторы динамических систем

Описанные конструкции указывают на существование гиперболических множеств и сложное поведение динамических систем при весьма общих предположениях. Однако в общем случае из этих результатов не следует асимптотическая хаотичность типичных траекторий, поскольку при наличии диссипации в фазовом пространстве систем всегда будут присутствовать аттракторы. Если это регулярные аттракторы, о которых шла речь в п. 2.2, то сложная динамика, которая обеспечивается присутствием гиперболических множеств, описанных выше, окажется переходным процессом, так что в конечном счете поведение таких систем будет стационарным, периодическим или квазипериодическим. Хаотическое поведение диссипативных систем обеспечивается наличием в их фазовом пространстве нетривиального подмножества — странного аттрактора. Впервые возможность существования такого подмножества была доказана в работе [16].

5.1 Странные и хаотические аттракторы

Аттрактор динамической системы называется странным, если он отличается от конечного объединения гладких подмногообразий пространства M [12, 22]. Напомним, что (гладким) подмногообразием пространства M называют всякое подмножество W в пространстве M' ($M' \subseteq M$) такое, что локально оно выглядит как часть пространства M' и имеет в каждой точке единственную касательную. Таким образом, в определении странного аттрактора подчеркивается именно его негладкая структура: в некотором сечении он представляет собой канторово множество (т.е. фрактал). Это свойство и экспоненциальная неустойчивость траекторий на аттракторе явились причиной введения в работе [16] определения «странный», т.к. рождение такого множества в гладких динамических системах представлялось весьма необычным⁴.

Странные аттракторы обладают некоторой степенью гиперболичности, однако эта гиперболичность имеет иную форму, нежели равномерная ги-

⁴ По выражению одного из авторов этого термина, Д. Рюэля, странные аттракторы выглядят странно [85].

перболичность, описанная в п. 3. Такие аттракторы действительно являются сложно устроенными множествами, но все же они не могут быть изучены посредством использования результатов гиперболической теории (подробно об этом изложено, например, в обзоре [86]). Тем не менее, хорошо известны примеры именно гиперболических аттракторов динамических систем (см. п. 5.2), отвечающих равномерной гиперболичности.

Аналитических результатов, касающихся существования странных аттракторов, относительно мало. Так, считается, что в областях Ньюхауса в случае седло-фокуса могут быть плотны хаотические системы со счетным числом странных аттракторов [87]. Более того, можно ожидать, что в окрестности семейства диффеоморфизмов, имеющего гомоклиническое касание устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболической точки, могут существовать подмножества систем, не имеющих устойчивых циклов, но обладающих странными аттракторами.

Ряд утверждений были доказаны для семейства диффеоморфизмов произвольной размерности [88–91]. Основным результатом, полученным в этом направлении, сводится к следующему. Пусть f_a — семейство диффеоморфизмов многообразия M , $\dim M \geq 2$, имеющее гомоклиническое касание при $a = \tilde{a}$. Тогда существует множество $A \subset \mathbb{R}$ такое, что f_a обладает странным аттрактором для каждого $a \in A$ и $A \cap [\tilde{a} - \varepsilon, \tilde{a} + \varepsilon]$ имеет положительную меру Лебега для всех $\varepsilon > 0$.

Сейчас понятие «странный аттрактор» приобрело собирательный смысл, используя который хотят подчеркнуть хаотичность изучаемой системы. Обычно считается, что динамическая система обладает странным аттрактором, если в ее фазовом пространстве имеется предельное множество, состоящее из хаотических траекторий. При этом хаотичность может быть обеспечена самыми разными критериями: гомоклиничностью, фрактальностью, наличием положительного ляпуновского показателя, непрерывностью спектра, бифуркациями удвоения периода и т.п. (см. [27] и приведенные там ссылки). Таким образом, этот термин является скорее парадигмой, чем характеристикой какого-то математического объекта.

Вместе с тем известно, что существуют странные нехаотические аттракторы [92], т.е. такие аттракторы, которые имеют фрактальную структуру, но система с таким аттрактором не обладает хаосом ни в каком

смысле. Поэтому широкое использование понятия «странный аттрактор» оказывается не всегда оправданным.

Если неизвестна структура аттрактора хаотической системы, как это бывает при численных и экспериментальных исследованиях, правильнее было бы называть такие аттракторы хаотическими, акцентируя внимание именно на сложном движении траекторий. Это не препятствует тому, что хаотические аттракторы могут быть гиперболическими притягивающими множествами, иметь трансверсальную гомоклиническую траекторию и т.п.

Строгие математические результаты получены главным образом для аттракторов, которые обладают свойствами гиперболичности. К ним относятся гиперболические аттракторы и аттракторы квазигиперболического типа, которые иногда называют стохастическими аттракторами.

5.2 Гиперболические аттракторы

Множество Λ называется гиперболическим аттрактором динамической системы, если Λ — замкнутое топологически транзитивное гиперболическое множество и существует такая окрестность $U \supset \Lambda$, что $\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} f^n(U)$. Гиперболический аттрактор является структурно устойчивым (грубым) множеством. Это означает, что малые возмущения не могут привести к качественным перестройкам как самого аттрактора так и поведения систем в целом. Динамические системы с гиперболическим типом аттрактора являются моделями структурно устойчивых систем с наиболее выраженными хаотическими свойствами [20, 49, 86].

В настоящее время гиперболических аттракторов обнаружено немного, и поэтому каждый пример, как правило, носит имя автора, который его построил. К хорошо известным аттракторам такого типа относятся соленоид Смейла-Вильямса (см., например, [3, 20, 29, 30, 86]) и аттрактор Плыкина [21, 30, 86, 93, 94].

К аттракторам, которые по своим свойствам близки к гиперболическим, принадлежит аттрактор Белых [28, 95, 96] и аттрактор Лози [20, 28, 97, 98]. При этом подразумевается расширение понятия гиперболичности за рамки класса гладких обратимых отображений, поскольку

такие аттракторы существуют в динамических системах с особенностями [96, 99–101].

Отметим, что аттрактор Лоренца [12, 102] и аттрактор Эно [12, 103], не относятся к гиперболическому типу: аттрактор Лоренца является негрубым (см. п. 5.3), а относительно аттрактора Эно доказаны транзитивность и чувствительная зависимость от начальных условий [104] (см. также [88]).

Из всех гиперболических аттракторов конструкция Смейла–Вильямса топологически наиболее проста. Аттрактор получается посредством отображения тороидальной области в себя, которое рассматривается в пространстве размерности три или больше.

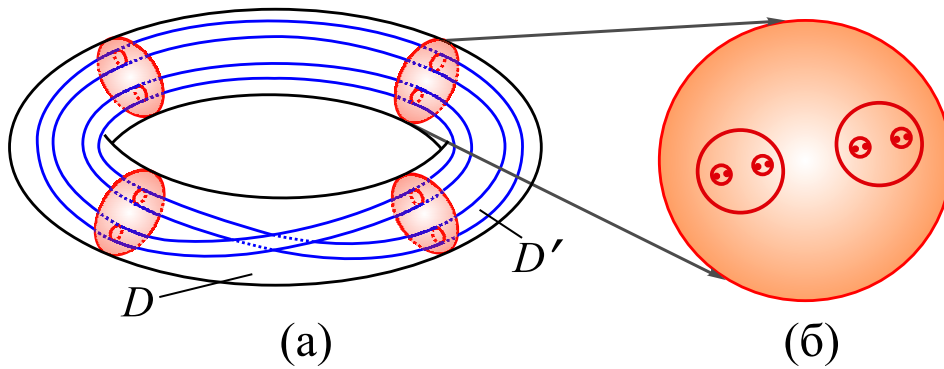


Рис. 20: Построение аттрактора Смейла–Вильямса.

Пусть D — полноторий, т.е. заполненный двумерный тор. Разрежем его и распрямим так, чтобы получился цилиндр. Теперь сильно растянем его и сожмем вдоль радиуса. В результате будем иметь нечто похожее на толстый шнур круглого сечения. Сложим его в виде двухоборотного обруча, склеив концы, и затем вложим в исходный полноторий D . Тогда получим область D' , лежащую в D , как показано на рис.20а. На следующем шаге такое преобразование применяется к области D' . Это приводит к тому, что D' трансформируется в область D'' , расположенную в D' , и так далее⁵. При этом в ходе построения площадь поперечного сечения сокращается более чем в два раза, то есть общий объем уменьшается. В сечении такая конструкция представляет собой иерархию структур, показанную на рис.20б.

⁵ Такой объект иногда называют соленоидом Виеториса–ван-Данцига.

Описанное построение формально можно записать следующим образом. Тороидальная область — это трехмерная структура $\mathbf{T} = S^1 \times D^2$, где S^1 — единичная окружность, а D^2 — единичный диск в \mathbb{R}^2 . Тогда преобразование

$$f : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}, \quad f(x, y, \varphi) = \left(\frac{1}{k}x + \frac{1}{2} \cos \varphi, \frac{1}{k}y + \frac{1}{2} \sin \varphi, 2\varphi \right), \quad (3)$$

где значение $k > 2$ определяет степень сжатия тора «по толщине», задает соленоид как подмножество $\mathbf{T} \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим сечение области \mathbf{T} некоторой двумерной плоскостью Π . Тогда получим два диска радиуса $1/k$. При этом, очевидно, $f^2(\mathbf{T}) \subset f(\mathbf{T})$.

При итерациях отображения (3) картина будет повторяться на все меньших и меньших масштабах (рис.20б). В результате в сечении множество $f^m(\mathbf{T})$ будет состоять из 2^m дисков. При $m \rightarrow \infty$ получим аттрактор Смейла–Вильямса, который является гиперболическим. Он устроен так, что растяжение в одном направлении и сжатие в другом являются равномерными.

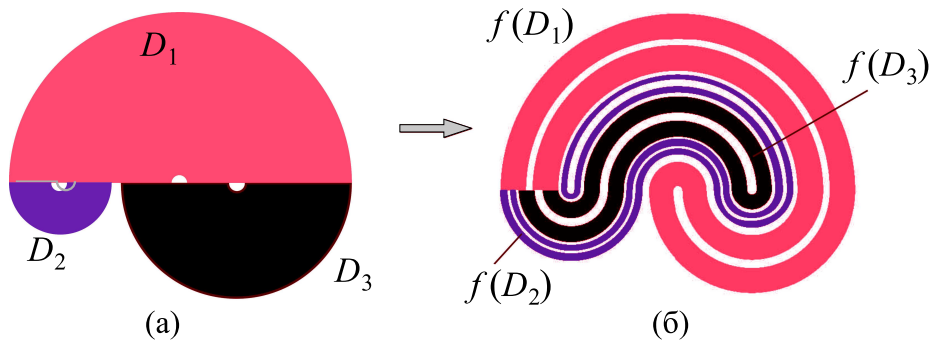


Рис. 21: Построение аттрактора Плыкина.

Другой известный гиперболический аттрактор был построен в работе [93]. Он получается применением специального отображения к области D , состоящей из объединения трех областей D_1 , D_2 и D_3 , каждая из которых представляет собой полукруг с концентрически вырезанным меньшим полукругом, причем сумма диаметров полукругов D_1 и D_2 меньше диаметра полукруга D_1 . Два полукруга D_1 и D_2 приклеены по диаметру к большему полукругу D_1 (рис.21а). Отображение $f : D \rightarrow D$ переводит

каждый радиус данного разбиения области D в радиус того же разбиения посредством некоторого сжатия. В результате получается картина, показанная на рис.21б. Посредством обобщения такой конструкции можно построить множество гиперболических аттракторов различной топологической структурой (см. [94]).

Долгое время считалось, что аттрактор Смейла–Вильямса, аттрактор Плыкина и другие гиперболические аттракторы являются искусственными математическими конструкциями, и физически реализуемых систем с такими аттракторами не существует. Но вот недавно в работах [32, 32] были построены динамические системы, имеющие в фазовом пространстве множество, по своим свойствам очень похожее на гиперболический аттрактор типа Смейла–Вильямса. Более того, в работе [105] свойства такого аттрактора были изучены *экспериментально*. В других исследованиях была показана возможность существования аттрактора Плыкина в модифицированной системе Лоренца [106] и модели нейрона [107]. В самое последнее время в работе [34] был предложен пример неавтономной системы, которая в сечении имеет аттрактор типа аттрактора Плыкина на плоскости (см. также [108] и данные там ссылки).

Однако необходимо отметить, что в настоящее время многие математики не признают существование гиперболических аттракторов в физически реализуемых системах.

5.3 Стохастические и другие аттракторы

По-видимому, адекватным математическим образом наблюдаемого развитого хаотического поведения физической системы может служить предложенный А.Г.Синаем стохастический аттрактор [109]. При этом, однако, определение “стохастический” не ассоциируется с наличием в системе внешних случайных возмущений или шумов. Этот термин заимствован из теории вероятностей и связывается с существованием инвариантной меры (см. п. 7.5).

Всякое гиперболическое предельное множество является стохастическим аттрактором. Для такого аттрактора свойства растяжения и сжатия на неустойчивых и устойчивых многообразиях, соответственно, является грубым, однако геометрическая картина и степень растяжения и сжатия в

различных точках аттрактора может отличаться. При этом такой аттрактор не содержит устойчивые траектории, и они не могут там появиться при малых возмущениях системы.

Формальное определение стохастического аттрактора опирается на понятие инвариантной меры и свойство перемешивания. Напомним, что аттрактор \mathcal{A} — это инвариантное замкнутое множество, у которого существует такая окрестность U , что $U_t = F^t U \subset U$ и $\bigcap_t U_t = \mathcal{A}$. Аттрактор \mathcal{A} является стохастическим, если для любой абсолютно непрерывной инвариантной меры μ в U ее смещение μ_t при $t \rightarrow \infty$ сходится к предельной инвариантной мере ν , которая не зависит от μ , и динамическая система $(\mathcal{A}, \nu, \{F^t\})$ обладает свойством перемешивания [109].

Известный пример стохастического аттрактора — аттрактор Лоренца, который возникает в знаменитой системе Лоренца при $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$ [96],

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = rx - xz - y, \quad \dot{z} = xy - bz,$$

описывающей в определенном приближении конвективное движение жидкости [102], дисковые динамо (см. [12]), а также некоторые модели лазеров [110]. Доказательство существования аттрактора Лоренца основано на довольно сложных построениях, основанных на сочетании строгих математических выкладок и численного анализа. В работе [35,36] доказано, что аттрактор Лоренца устойчив, т.е. он сохраняется при малых изменениях параметров и имеет единственную SRB-меру (см. п. 7.5). Эти свойства, в частности, означают, что он является физически наблюдаемым объектом.

Однако далеко не все хаотические аттракторы, которые наблюдаются в моделях реальных физических систем, обладают такими «хорошими» свойствами. Это связано с тем, что хаотические аттракторы могут содержать в себе бесконечное множество седловых циклов (см. п. 2.3). При этом неустойчивое многообразие цикла также принадлежит аттрактору. Тогда бифуркации, связанные с касанием устойчивого и неустойчивых многообразий, приводят к появлению бесконечного множества устойчивых периодических траекторий, что подробно описано в п. 4.3. Такие аттракторы принадлежат к квазистохастическому типу (т.е. являются так называемыми квазиаттракторами) [111,112]. Слабые возмущения систем с квазисто-

хаотическим аттрактором ведут к сложным качественным перестройкам как в динамике системы, так и в структуре самого аттрактора (о физических аспектах подробнее см. [113]).

Показателен следующий пример. Аналитические результаты теории бифуркаций показывают, что в системе Лоренца с параметрами, сколь угодно близкими к значениям $b = 8/3$, $\sigma = 10.2$, $r = 30.2$, существуют устойчивые предельные циклы [114, 115]. Однако никакие численные методы до настоящего времени не в состоянии их выявить. Более того, всегда найдется область параметров, где, согласно строгой теории, будут существовать устойчивые циклы, однако численно эти циклы будет невозможно обнаружить, какой бы ни была точность компьютерных расчетов.

Таким образом, динамика диссипативных систем с типичными хаотическими аттракторами в определенном смысле аналогична динамике гамильтоновых систем, у которых, наряду со стохастическими слоями, существуют инвариантные торы КАМ [15].

6 Хаос в физических системах

Физический интерес к хаотическим явлениям возник довольно давно и связано это было с возможностью описания систем с очень большим числом степеней свободы (подробнее см. [15]). Однако с открытием экспоненциальной неустойчивости оказалось, что практически любая типичная нелинейная система с более чем одной степенью свободы может проявлять хаотические свойства. При этом одним из основных вопросов, относящихся к данной проблематике, является вопрос о мере хаотических траекторий.

В то же время известно, что в нелинейных системах хаотические траектории всегда граничат с множеством сосуществующих регулярных (нехаотических) орбит, и мера таких регулярных траекторий может быть нулевой. Как следует из представленного выше материала, ответ на вопрос о роли таких регулярных траекторий в динамике может быть отнюдь непростым.

6.1 Хаос и странные аттракторы

Когда говорят о физическом проявлении хаоса, то обычно имеют в виду такое поведение системы, когда ее хаотические траектории становятся неотличимыми от некоторого случайного процесса. Это означает, что должно существовать определенное соответствие между решениями некоторого стохастического уравнения и детерминированных уравнений. Однако динамика хаотических систем не являются полностью случайной (см. п.9). Несмотря на некоторую парадоксальность этих утверждений, исследования последних сорока лет показали, что подход к изучению хаоса, развиваемый в рамках теории динамических систем, вполне оправдал себя.

Основополагающим понятием при исследовании хаотических систем оказывается понятие грубости или структурной устойчивости [18]. Исторически первыми были построены грубые хаотические аттракторы. Все они были созданы исходя из геометрических предпосылок и без привлечения модельных уравнений, описывающих какой-либо физический процесс. Но с физической точки зрения более важны именно грубые свойства, которые сохраняются при малых возмущениях и, следовательно, являются

ся наблюдаемыми. Негрубые же системы имеют ту особенность, что могут качественно меняться под действием возмущений. Поэтому, вообще говоря, вследствие неточности измерений, неучтенных факторов, округлений и т.п., построенные уравнения будут адекватными только если их качественные свойства сохраняются при возмущениях. Таким образом, математически структурная устойчивость считалась необходимым условием при создании модельных систем.

Однако в основе хаотичности лежит экспоненциальная неустойчивость. При этом, чтобы система обладала хаотическим поведением (т.е. имела чувствительную зависимость от начальных условий), необходима только неустойчивость, фигурирующая в определении гиперболичности. Но во все не обязательно, чтобы эта неустойчивость была одинаковой для всех траекторий. Более того, для различных траекторий количество неустойчивых направлений может быть разным. Так устроен, например, аттрактор Лоренца. Аттракторы такого типа не разрушаются при малых возмущениях, однако их геометрическая структура, вообще говоря, может меняться. В другой ситуации, вследствие гомоклинических касаний, возникающих в типичных системах, хаотические аттракторы с необходимостью будут содержать устойчивые циклы большого периода и очень малых областей притяжения. Это означает, что такие аттракторы негрубые, и их детальная структура ненаблюдаема. Тем не менее, свойство экспоненциальной неустойчивости чрезвычайно важно, поскольку позволяет, в принципе, наблюдать хаотическое поведение в соответствующих системах экспериментально.

Таким образом, при описании хаотических систем имеет место качественный подход. Как отмечено в монографии [21], ситуация в определенном смысле аналогична вопросу, является ли длина стержня рациональным или иррациональным числом (спрашивается только о качественном свойстве стержня).

Вот что писал академик В.И.Арнольд [116] об одном из хаотических аттракторов (аттракторе Эно [103]), обнаруженном численно в двумерном отображении: *«Наблюдаемое в численном эксперименте приближение к множеству, имеющему локально вид произведения канторова множества на отрезок, не удастся описать в рамках действующих определений гипер-*

большинности⁶ (не исключено даже, что в это множество вкраплены области притяжения длинных циклов). Таким образом, математики не признают множество Эно гиперболическим. В то же время с точки зрения экспериментатора движение фазовой точки под действием итераций отображения имеет ярко выраженный стохастический характер.»

Следовательно, в контексте динамического хаоса подход, основанный на понятии структурной устойчивости, нуждается в пересмотре. Именно, при построении динамической системы, описывающей какой-либо физический процесс, необходимо, чтобы только существенные (с той или иной точки зрения) свойства сохранялись при малых возмущениях. Это качественно отличается от общепринятой концепции, когда при возмущении требуется сохранение всех качественных свойств. Естественно, в каждом конкретном случае следует определить, какие именно возмущения допустимы и какие свойства существенны для исследуемой системы.

6.2 Неустойчивые множества и захват траекторий

Хорошо известно, что в типичном случае гамильтоновы системы не интегрируемы и не хаотичны [117], но проявляют сложную динамику в том смысле, что в их фазовом пространстве иерархия КАМ-островков устойчивости сосуществует с хаотическим слоем, который сформирован одной или несколькими эргодическими компонентами (см. [15,21,41]). Это, в частности, означает что в целом регулярная и хаотическая динамика тесно переплетены. Такой тип поведения гамильтоновых систем описан во многих работах и наблюдался также экспериментально (см. [41] и приведенные там ссылки).

Разделенное фазовое пространство приводит к довольно неожиданному эффекту залипания (stickiness) или захвата [118–120], который заключается в том, что хаотическая траектория, попадая в малую окрестность КАМ-островков, может оставаться там достаточно долго.

Когда фазовая точка находится в хаотической области вдали от множества КАМ-торов, то она будет двигаться случайным образом. Однако, если эта точка попадает в область вблизи такого множества, то она оказы-

⁶ Позже было доказано [104], что аттрактор Эно является хаотическим в смысле определения, данного в п. 2.3.

вается захваченной в его окрестность. В окрестности КАМ-торов фазовая точка может пребывать произвольно долгое но конечное время, в течение которого система будет вести себя регулярно. При этом экспоненциальное расщепление корреляций, которое было присуще системе до захвата в область вблизи КАМ-торов, сменится расщеплением степенного типа [121]. По истечении этого интервала времени система вновь «обретает» хаотические свойства. Затем вся картина повторяется.

Таким образом, в целом гамильтонова система с разделенным фазовым пространством проявляет перемежающийся динамический режим: вслед за хаотическим поведением в течение продолжительного времени наблюдается почти регулярная динамика. Такой процесс, очевидно, отражается на статистических свойствах гамильтоновых систем.

Явление захвата было обнаружено при исследовании многих задач, возникающих в ходе анализа ряда физических явлений. Среди них — кинетическое описание многочастичных систем, задачи физики плазмы, задача о динамике частицы в потенциальной яме и др. (см. [41, 119] и приведенные там ссылки). Однако в общем случае неизвестно, будет ли наблюдаться захват в системах, где существует конечное или бесконечное число КАМ-островков [120].

Недавно в работе [122] были построены довольно любопытные и весьма наглядные семейства гамильтоновых систем, в фазовом пространстве которых имеются четко разделенные хаотические и регулярные компоненты. В простейшем случае динамика этих семейств определяется единственным КАМ-островком и единственной эргодической хаотической компонентой.

Такое поведение демонстрируют бильярды с границей в форме идеализированного «гриба», которая состоит из полукруга S и прямоугольного основания Π (рис.22). В конфигурационном пространстве такого бильярда границу между эргодической и регулярной компонентами образуют траектории, находящиеся в полукруге S , которые касаются окружности с радиуса r . При этом, как легко видеть (рис.22), регулярная область состоит из траекторий, которые не пересекают эту окружность, оставаясь в полукруге S и не попадая в основание Π . Однако хаотические орбиты всегда необходимостью посещают основание бильярда.

На примере таких бильярдов недавно было обнаружено [123], что для

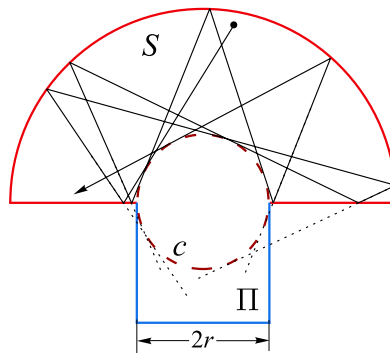


Рис. 22: Бильярд с границей в форме гриба [122].

наблюдения динамического захвата хаотической траектории вовсе необязательно существование иерархии островков стабильности. Более того, в данном бильярде этот процесс происходит благодаря наличию бесконечного множества нулевой меры неустойчивых периодических траекторий, существующих в хаотической области. Иными словами, множества нулевой меры могут оказывать существенное влияние на поведение системы в целом.

Этот результат представляется весьма неожиданным, поскольку с точки зрения динамики всегда считалось, что такие множества не должны приниматься в расчет и их существованием можно пренебречь. Конечно, поскольку мера таких множеств нулевая, асимптотически они не влияют на эргодичность динамической системы. Тем не менее, захват хаотических траекторий вблизи границы регулярной области происходит именно благодаря их существованию.

Известно также много других систем (см. [41] и приведенные там ссылки), где существуют области меры нуль, которыми нельзя пренебречь при анализе динамики. Одна из них — это подкова Смейла в системе Дуффинга при некоторых значениях параметров. Появление такого множества влечет экспоненциальную неустойчивость по отношению к начальным условиям, однако почти все траектории с течением времени покидают его, притягиваясь к регулярным аттракторам. При этом, однако, период такого переходного хаотического процесса может быть сколь угодно большим.

Показателен пример с подковой в так называемой задаче захвата (см.

[42, 43]), когда двойная звезда захватывает пришедшую из бесконечности третью звезду⁷. В работе [42] было доказано, что присутствие подковы, которая имеет нулевую меру, приводит систему к возможности захвата. Еще один пример — бильярды Синая [9] и Бунимовича [125] (бильярд типа стадион). В таких бильярдах все траектории, за исключением множества меры нуль, — хаотические. Тем не менее, эти множества сильно влияют на всю динамику и долговременные характеристики движения [41].

Таким образом, вся сложность, проявляемая динамическими системами, может заключаться в существовании множеств, которым обычно пренебрегают. Отсюда следует, что общий подход к описанию хаотических систем требует нового видения.

⁷ Эта известная проблема относится к вопросу о финальных движениях задачи трех тел (см. по этому поводу фундаментальное руководство [124])

7 Эргодические аспекты динамического хаоса

В полной мере описание динамики хаотических систем представляет собой неразрешимую (по крайней мере в настоящее время) задачу. Однако существует иной подход, при котором изучаются только типичные свойства динамической системы. Такая точка зрения, игнорирующая рассмотрение исключительных (редких) траекторий, принята в эргодической теории или метрической теории динамических систем, где в качестве основополагающего представления используется понятие меры.

Наличие инвариантных мер для динамических систем, по крайней мере одной инвариантной меры, обеспечивается теоремами существования. Одной из них является теорема Крылова–Боголюбова, согласно которой для динамических систем с компактным фазовым пространством всегда существует хотя бы одна инвариантная мера. В других случаях существование инвариантных мер следует из динамических законов.

Эргодическая теория в настоящее время бурно развивается благодаря возможности ее использования в различных приложениях (см., например, [28, 126] и приведенные там ссылки). При помощи рассматриваемых в этой теории характеристик и вероятностных аспектов таких как размерность, энтропия, показатели Ляпунова и др., можно получить более полную информацию о свойствах изучаемых систем, отличить детерминированный сигнал от стохастического и охарактеризовать глубину хаотичности.

Некоторые важные свойства динамических систем, рассматриваемых эргодической теорией, например, выполнение центральной предельной теоремы, экспоненциальное убывание корреляций, бернуллиевость и K -свойство в настоящее время положены в основу современного представления о детерминированном хаосе. Здесь мы опишем понятия, которые чрезвычайно полезны в приложениях.

7.1 Показатели Ляпунова

Как известно, в окрестности стационарной точки динамику системы (1) можно изучить с помощью собственных значений матрицы линеаризации. Для анализа движения в окрестности периодического движения

служат мультипликаторы. В общем случае для исследования поведения в окрестности произвольной траектории используются (характеристические) показатели Ляпунова.

Геометрически показатели Ляпунова характеризуют степень растяжения и сжатия в системе вдоль устойчивых и неустойчивых направлений (см. рис.5). Рассмотрим типичную фазовую траекторию $x(t)$ системы (1) и близкую к ней траекторию $x_1(t)$, т.е. $x_1(t) = x(t) + \xi(t)$. Рассмотрим функцию

$$\Xi(\xi(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\xi(t)|}{|\xi(0)|},$$

которая определена на векторах начального смещения $\xi(0)$ таких, что $|\xi(0)| = \varepsilon$, где $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда, в зависимости от направления вектора $\xi(0)$ функция $\Xi(\xi(0))$ будет принимать конечный ряд значений $\{\lambda_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Эти значения и называются показателями Ляпунова (см., например, [40, 127, 128] и данные там ссылки). Совокупность всех возможных показателей Ляпунова называется ляпуновским спектром.

Строгое обоснование теории показателей Ляпунова получила после доказательства известной мультипликативной эргодической теоремы [129–131], которая устанавливает их существование для почти всякого $x \in M$.

Показатели Ляпунова — это универсальные инвариантные характеристики, которые позволяют судить о некоторых свойствах динамической системы. В частности, как вытекает из геометрического представления, показатели Ляпунова служат мерой хаотичности: если имеются положительные показатели, то поведение динамической системы будет хаотическим.

Число характеристических показателей равно размерности n фазового пространства исходной динамической системы, и их можно упорядочить по убывающей: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Для систем дифференциальных уравнений (1) один из показателей Ляпунова, отвечающий смещению вдоль траектории, которая не оканчивается в особой точке, всегда равен нулю. Для гамильтоновых систем показатели обладают следующей симметрией: $\lambda_j = -\lambda_{2k-j+1}$, где k — число степеней свободы. Следовательно, для гамильтоновых систем по крайней мере два показателя будут равны нулю. В случае полностью интегрируемых систем все показатели нулевые.

Сумма всех ляпуновских показателей равна среднему вдоль траектории значению дивергенции векторного поля, задающего динамику системы:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{div} \dot{\xi} dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j.$$

Относительное изменение фазового объема, как известно, определяется знаком при дивергенции. Следовательно, для гамильтоновых систем $\sum_j \lambda_j = 0$, а для диссипативных систем $\sum_j \lambda_j < 0$.

Показатели Ляпунова также несут информацию о размерности странного аттрактора динамической системы (см. п. 7.3). Величина

$$D_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

где j определяется как $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{j+1} < 0$, называется ляпуновской размерностью или размерностью Каплана–Йорка по именам авторов, выдвинувших в свое время гипотезу о связи фрактальной размерности и характеристических показателей. Значение D_L дает оценку сверху хаусдорфовой размерности аттрактора [132, 133].

Поскольку показатели Ляпунова определяют степень неустойчивости, то они естественным образом оказываются связанными с энтропией динамической системы.

7.2 Энтропия

Каждая динамическая система может быть охарактеризована некоторой величиной (иногда бесконечной), которая называется энтропией. Неожиданным оказывается то обстоятельство, что если энтропия положительна, то система обладает также и другими довольно сильными статистическими свойствами. Более того, для двумерных диффеоморфизмов такая динамическая сложность обусловлена существованием подков в фазовом пространстве [30] (см. п. 3).

Энтропия — это в известном смысле мера (не)упорядоченности системы. В настоящее время для описания этого свойства в том или ином контексте используется большое количество различных характеристик, для

которых также употребляется термин «энтропия». Так, в теории информации энтропия H вводится для систем, которые могут находиться в состояниях x_i с некоторыми вероятностями $p_i = p(x_i)$, с помощью формулы Шеннона:

$$H = - \sum_i p_i \log p_i . \quad (4)$$

Похожим образом можно дать определение метрической энтропии динамической системы, или энтропии Колмогорова-Синая. Благодаря этому понятию удалось строго сформулировать абсолютный критерий хаотичности как неустойчивого по Ляпунову движения с положительной метрической энтропией.

Из соотношений для энтропии следует, что эта величина служит мерой экспоненциального разбегания (или сближения) траекторий динамической системы. Этот факт сам по себе был известен давно, но энтропийный подход дал возможность по-новому подойти к исследованию сложных систем [134].

Предположим, что динамическая система представлена отображением $x_{n+1} = f(x_n)$ на компактном множестве A . Пусть также определено разбиение множества A на конечное число измеримых множеств A_i . Будем обозначать множество точек, отображаемых в A_i преобразованием f^k , как $f^{-k}(A_i)$. Не выписывая все разбиения, порождаемые таким обратным отображением, представим общий случай: на m -ом шаге разбиение на $A_{i_1 i_2 \dots i_m}^{(m)} = A_{i_1} \cap f^{-1}(A_{i_2}) \cap f^{-2}(A_{i_3}) \cap \dots \cap f^{-(m-1)}(A_{i_m})$ — это точки из множества A_{i_1} , которые на следующих $(m-1)$ шагах попадут последовательно в $A_{i_2}, A_{i_3}, \dots, A_{i_m}$.

Вычислим энтропию каждого разбиения по аналогии с формулой Шеннона:

$$H^{(m)} = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_m} p(A_{i_1 i_2 \dots i_m}) \log p(A_{i_1 i_2 \dots i_m}).$$

Если обозначить $\varepsilon = \max_i \text{diam} A_i$, то энтропия динамической системы определится как

$$K = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} (H^{(m+1)} - H^{(m)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H^{(m)} . \quad (5)$$

Иными словами, энтропия задается как асимптотический прирост неопределенности для разбиения бесконечно малого диаметра. Заметим, что на

практике приведенное определение энтропии никогда не используется. Вместо этого энтропия обычно оценивается при помощи ляпуновских показателей (см. (8)), либо рассчитывается аппроксимирующая ее величина K_2 . Эта величина вводится следующим образом.

Рассмотрим энтропию Реньи:

$$H_q = \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_i p_i^q \right). \quad (6)$$

Легко показать, что энтропия Шеннона (4) при $q \rightarrow 1$ является ее частным случаем. Используя эту величину, можно также ввести обобщенную размерность D_q (см. п. 7.3) и величину K_q , которая называется обобщенной энтропией, наиболее общим образом характеризующей меру неупорядоченности динамической системы. Именно, если в определение энтропии K (см. (5)) подставить H_q вместо H , то получим

$$K_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} (H_q^{(m+1)} - H_q^{(m)}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_q^{(m)}.$$

Одно из важнейших свойств величины K_q можно записать в виде последовательности неравенств:

$$K = K_1 \leq K_2 \leq \dots \leq K_{q-1} \leq K_q \leq \dots, \quad (7)$$

где K — энтропия Колмогорова-Синяя. Таким образом, энтропию Колмогорова-Синяя можно оценить сверху, если найти K_i , $i = 2, 3, \dots$ (см. п. 7.3). В свою очередь, энтропия Колмогорова-Синяя выражается через показатели Ляпунова следующим образом [131]:

$$K_1 = \int_M \sum_{\lambda_i \geq 0} \lambda_i(x) d\mu. \quad (8)$$

Это соотношение может быть в ряде случаев упрощено. Если f — дифференцируемое отображение конечномерного многообразия и μ — эргодическая вероятностная мера для динамической системы, то $K_1 \leq \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i$ [127, 131]. Равенство в этом выражении имеет место, если рассматривать одну хаотическую компоненту движения, т.е. если мера μ — мера Синяя-Рюэля-Боуэна [127] (см. 7.5).

Величина энтропии h не зависит от способа разбиения фазового пространства. Кроме того, если две динамические системы имеют равные энтропии, то их статистические законы движения одинаковы [135, 136].

7.3 Размерностные характеристики

Обобщенная размерность D_q определяется следующим образом:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

где ε — характерный размер ячеек, на которые разбивается фазовое пространство. Поясним смысл обобщенной размерности D_q для различных q . Если $q = 0$, то $p_i^q = 1$. Полученная величина называется фрактальной размерностью или емкостью множества. В некоторых случаях D_0 называют также хаусдорфовой размерностью. Это связано с тем, что, хотя существует ряд исключений, для типичных аттракторов (которые встречаются в численных расчетах и физических экспериментах) значения емкости и хаусдорфовой размерности очень близки.

Если $q = 1$, то числитель и знаменатель в соотношении (6) обращаются в нуль, поскольку $\sum p_i = 1$. Однако нетрудно показать, что в этом случае

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sum p_i \ln p_i}{\ln \varepsilon}.$$

Поскольку соотношение $\sum p_i \ln p_i$ определяет энтропию, то величина D_1 описывает, как при $\varepsilon \rightarrow 0$ возрастает количество информации о рассматриваемом множестве. Поэтому D_1 называется информационной размерностью.

Если $q = 2$, то

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \sum p_i^2}{\ln \varepsilon}.$$

Выражение p_i^2 — это вероятность того, что по крайней мере две точки находятся в i -й ячейке. Следовательно, значение D_2 определяется через бинарные корреляции в распределении вероятностей. Поэтому величину D_2 называют корреляционной размерностью.

Для $q = 3, 4, \dots$ размерности D_3, D_4, \dots связаны с корреляциями высших порядков и дают дополнительную информацию о структуре рассматриваемых множеств. Кроме того существует и определена обобщенная размерность D_q при $q \rightarrow \infty$ [137].

Отметим, что энтропия и размерность в определенном смысле независимые инварианты. Так, в случае квазипериодической динамики с большим числом несоизмеримых частот (т.е. высокой размерности) энтропия

равна нулю. Но, например, для пилообразного одномерного отображения $x_{n+1} = lx_n \pmod{1}$ при $l \gg 1$ энтропия может быть достаточно большой величиной. Поэтому при исследованиях реальных систем необходимо уметь рассчитывать обе эти характеристики.

7.4 Оценки энтропии и размерности

Для расчетов обобщенных величин вводится понятие обобщенного корреляционного интеграла:

$$C_q(\varepsilon) = \left(\sum p_i^q \right)^{1/(q-1)}.$$

Поскольку $-\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) = H_q^{(m)}(\varepsilon)$, то C_q — это переобозначение H_q . Следовательно, связи с другими обобщенными величинами сохраняются. Обобщенный корреляционный интеграл удобен тем, что для случая $q = 2$ он сильно упрощается:

$$C_2(\varepsilon) \equiv C(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum S_i(\varepsilon),$$

где S_i — число точек внутри i -й ячейки, а N — число элементов последовательности. Величина C_2 называется корреляционным интегралом. Алгоритм его вычисления хорошо разработан (см. [40, 138, 139] и приводимые там ссылки).

Вернемся к методу определения обобщенной размерности D_q и энтропии K_q . Отмеченная связь $-\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) = H_q^{(m)}(\varepsilon)$ позволяет выразить обобщенные величины через обобщенный корреляционный интеграл:

$$D_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\frac{H_q(\varepsilon)}{\ln \varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C_q^{(m)}(\varepsilon)}{\ln \varepsilon},$$

$$K_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} H_q^{(m)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} -\frac{\ln C_q^{(m)}(\varepsilon)}{m}.$$

Исходя из полученных соотношений можно ожидать, что при малых ε и достаточно больших m выполняется $\ln C_q^{(m)}(\varepsilon) \cong D_q \ln \varepsilon - K_q w + \text{const}$, где $w = (m-1)\tau$ называют шириной окна реконструкции. Отсюда, кроме оценки D_q , фиксируя масштаб ε и исследуя зависимость от w , можно получить оценку обобщенной энтропии K_q динамической системы.

В исследованиях [140, 141] была предложена иная схема расчета K_2 -энтропии, используя представление K_q как предела разности $H_q^{(m+1)} - H_q^{(m)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $m \rightarrow \infty$:

$$K_2 \sim \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} K_2^{(m)}(\varepsilon), \quad K_2^{(m)} = \frac{1}{k\tau} \ln \frac{C^{(m)}(\varepsilon)}{C^{(m+k)}(\varepsilon)}.$$

Здесь $C^{(m)}(\varepsilon)$ — это корреляционный интеграл $C_2^{(m)}(\varepsilon)$. Зависимость $K_2^{(m)}$ от размерности вложения m можно аппроксимировать по методу наименьших квадратов следующим соотношением:

$$K_2^{(m)}(\varepsilon) = K_2(\varepsilon) + \frac{b}{m^c},$$

где b и c — некоторые положительные величины.

Итак, в случае малого фиксированного ε энтропия K_2 определяется как предел $K_2^{(m)}$ при $m \rightarrow \infty$.

7.5 Статистические свойства динамических систем

Динамическая система хаотична, если ее поведение обладает некоторыми свойствами, присущими случайным процессам, которые рассматриваются в теории вероятностей. В данном разделе мы представим определенную иерархию хаотических свойств динамических систем [142, 143]. При этом каждое последующее свойство является более сильным по сравнению с предыдущим.

I. Существование инвариантной меры [29, 30, 144, 145]. Для динамических систем с компактным фазовым пространством имеются достаточно общие теоремы существования инвариантной меры. Так, в гамильтоновых системах это следует из теоремы Лиувилля. Для диссипативных систем часто инвариантная мера оказывается сосредоточенной на аттракторе.

Важной частью этого направления исследований является доказательство существования так называемых «физически наблюдаемых мер», или SRB-мер (мер Синая–Рюэля–Боуэна), введенных в 70-х годах [146–149] (см. также [150]). Наличие в системе SRB-меры означает, что существует такая определенная на аттракторе инвариантная мера, относительно которой почти все траектории, сосредоточенные в окрестности аттрактора, оказываются равномерно распределенными. Тогда среднее по времени

любой непрерывной функции будет совпадать со средним по пространству, которое и определяется инвариантной мерой. Отсюда и название — физически наблюдаемая мера.

Хорошо известно, странные аттракторы в подавляющем большинстве случаев не описываются аналитически — их можно обнаружить только численно. Важность SRB-меры состоит в том, что из ее существования следует, что изображения странных (хаотических) аттракторов, полученные с помощью компьютеров, соответствуют реально существующему аттрактору.

Гиперболический аттрактор имеет SRB-меру. Для неоднородных гиперболических аттракторов такие меры также были построены для семейства отображений Эно [151], уравнений Лоренца [35, 36] и некоторых других динамических систем (см. [150]).

Одно из важных следствий существования инвариантной меры в консервативных системах — это известная теорема Пуанкаре о возвращении [126], согласно которой система, кроме множества начальных условий нулевой меры, возвращается в окрестность своего первоначального состояния бесконечно много раз. В свое время этот результат послужил основой для парадокса Цермело в статистической механике [152], который был выдвинут в качестве возражения против H-теоремы Больцмана для кинетического уравнения газа [153]. Газ частиц, который можно рассматривать как компактную гамильтонову систему, должен возвращаться в область, в которой он находился в начальный момент времени. Например, если газ занимал только половину некоторого объема, то спустя некоторое время все частицы вновь соберутся в той же половине. Такое событие противоречит H-теореме Больцмана, из которой следует, что система из большого числа сталкивающихся частиц необратимо стремится к состоянию равновесия.

Разрешение этого парадокса, данное Больцманом [154], опирается на два основных момента: крайне малую вероятность возвращения и огрубление функции распределения. Для систем статистической механики время возврата чрезвычайно велико и поэтому вероятность подобного возврата составляет исчезающе малую величину. Процедура огрубления для функции распределения не предусматривает учет таких редких событий, что

делает релаксацию к равновесию необратимой.

Хотя такое объяснение представляется достаточно разумным, остается неясным, каким образом в исходной системе происходит огрубление, т.к. процесс огрубления неоднозначен, а сама система остается без изменений. Обсуждение данных вопросов можно найти в работах [15, 41, 155, 156].

II. Если мера уже построена, то естественно исследовать вопрос об эргодических свойствах системы по отношению к этой мере [143, 145]. Согласно эргодической теореме Биркгофа-Хинчина (см., например, [28, 126]), из существования инвариантной меры вытекает возможность усреднения по времени почти всюду, т.е. наличие временных средних.

III. Перемешивание [15, 28–30, 126, 143, 145]. Преобразование $F^t : M \rightarrow M$ называется перемешивающим, если для любых двух функций h и g выполняется

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_M h(F^t x) g(x) d\mu = \int_M h(x) d\mu \int_M g(x) d\mu,$$

т.е. спустя достаточно большой промежуток времени $h(F^t x)$ и $g(x)$ будут статистически независимыми. Соотношение $\int h(F^t x) g(x) d\mu$ называется временной корреляционной функцией. Существование в системе перемешивания влечет необратимость и непредсказуемость динамики (см. [15]).

IV. K -свойство (квазирегулярное, как предложил А.Н.Колмогоров, или колмогоровское по современной терминологии) [28, 126, 134]. Если динамическая система является K -системой, то она имеет положительную энтропию. Такое деление динамических систем на K -системы и детерминированные преобразования с нулевой энтропией формализует очень важное представление о стохастических и детерминированных системах, рассматриваемых в статистической физике (см. также п. 9).

V. Бернуллиевость [126, 135]. Поведение динамической системы можно рассматривать тем более случайным, чем лучше оно представляется последовательностью независимых случайных величин. Если кодирование динамической системы в регулярный стационарный процесс (см. п. 4.4) представляет собой такую последовательность, то динамическая система называется бернуллиевской.

VI. Выполнение условий центральной предельной теоремы [84, 143]. Эта теорема устанавливает условия, при выполнении которых функции от

большого числа слабо зависимых величин имеют распределения вероятностей, близкие к нормальному гауссовскому закону. Пусть $f : M \rightarrow M$ — некоторое преобразование пространства M в себя. Для заданной функции g рассмотрим временные флуктуации (около среднего): $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(f^k(x)) - \bar{g}$, где $\bar{g} = \int_M g(x) d\mu(x)$

Выполнение центральной предельной теоремы означает, что найдется $\sigma = \sigma(g)$, при котором

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left\{ x : \sigma \sqrt{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(f^k(x)) - \bar{g} \right] < a \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-u^2/2} d\mu .$$

Смысл этого соотношения состоит в том, что последовательность значений $g(f^k(x))$, порождаемых динамической системой f , описывается стандартной нормальной функцией распределения, а временные флуктуации не стремятся ни к какому пределу, но имеют предельное гауссово распределение.

Это свойство присуще гиперболическим динамическим системам и рассеивающим бильярдам.

VII. Экспоненциальное убывание корреляций [144]. В приложениях важно уметь установить не только наличие перемешивания (см. выше п. III), но и оценивать скорость сходимости к пределу. Если для некоторой функции g с нулевым средним, $\bar{g} = 0$, найдутся числа $C > 0$, $0 < q < 1$ такие, что

$$\left| \int_M g(f^k(x)) g(x) d\mu \right| \leq C(g) q^{|k|} ,$$

то g обладает свойством экспоненциального убывания корреляций.

8 Реконструкция динамических систем

Несмотря на интенсивное развитие теории динамических систем и достаточно мощный теоретический аппарат, адекватное описание хаотических процессов является весьма непростой, если вообще разрешимой проблемой. Более того, большинство сложных систем, которые рассматриваются в естественных дисциплинах, невозможно исследовать в рамках модели (1), поскольку далеко не всегда удастся составить какие-либо уравнения исходя из первых принципов. Поэтому изучение систем, особенно при экспериментальных исследованиях, часто реализуется посредством обработки регистрируемых сигналов, произведенных системой. Например, в аритмологии в качестве такого сигнала используется электрокардиограмма, в сейсмологии — запись колебаний земной коры, в метеорологии — данные метеонаблюдений, в финансовом анализе — курс ценных бумаг и т.п. [157–161]. Обычно такой сигнал называется наблюдаемой, а метод исследования — реконструкцией динамических систем [138, 162].

Наблюдаемая — это последовательность значений некоторой переменной (или переменных), регистрируемых непрерывно или через некоторые промежутки времени. Часто вместо термина наблюдаемая используется понятие временной ряд. Ясно, что наличие только лишь временного ряда вместо полного решения уравнений сильно ограничивает наши знания об изучаемой системе. Это налагает большие ограничения на возможности метода реконструкции.

Скалярным временным рядом $\{x_i\}_{i=1}^N$ называется массив из N чисел, представляющих собой значения некоторой измеренной (наблюдаемой) динамической переменной $x(t)$ с некоторым постоянным шагом τ по времени, $t_i = t_0 + (i - 1)\tau$: $x_i = x(t_i)$, $i = 1, \dots, N$.

Современное исследование временных рядов базируется на идее [163], что удовлетворительную геометрическую картину странного аттрактора можно получить, если вместо переменных, входящих в систему (1), использовать так называемые векторы задержек: $z_i = \{x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}\}$. Впервые данный подход к анализу временных рядов был математически обоснован в работе Ф.Такенса [164].

8.1 Элементы теории Такенса

Пусть задана динамическая система $F^t(x)$ с фазовым пространством M . Величины, образующие временной ряд, являются значениями некоторой функции состояния $x(t)$ этой динамической системы на многообразии W^d из M : $x_i = h(x(t_i)) = h(F^{t_i}(x_0))$. Рассмотрим построение векторов задержки, если временной шаг равен τ . Очевидно, для векторов состояния $x(t_i) = x_i$ верны равенства: $x_{i+1} = F^\tau(x_i)$, $x_{i+2} = F^{2\tau}(x_i)$, \dots , $x_{i+m-1} = F^{(m-1)\tau}(x_i)$. Поэтому для компонент z -векторов задержки выполняется

$$\begin{aligned} x_i &= h(x_i) \equiv \Phi_0(x_i), \\ x_{i+1} &= h(x_{i+1}) = h(F^\tau(x_i)) \equiv \Phi_1(x_i), \\ x_{i+2} &= h(x_{i+2}) = h(F^{2\tau}(x_i)) \equiv \Phi_2(x_i), \\ &\dots, \\ x_{i+m-1} &= h(x_{i+m-1}) = h(F^{(m-1)\tau}(x_i)) \equiv \Phi_{m-1}(x_i). \end{aligned}$$

Поскольку все компоненты вектора $z_i = \{x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i+m-1}\}$ можно связать с одним и тем же состоянием динамической системы x_i , то существует векторная функция Λ , отображающая векторы $x_i \in W^d$ в векторы m -мерного евклидова пространства \mathbb{R}^m :

$$z_i = \Lambda(x_i), \quad x_i \in W^d, \quad z_i \in \mathbb{R}^m.$$

Приведенные рассуждения и составляют основное содержание теоремы Такенса [164], утверждающей, что при $m \geq 2d + 1$ типичным свойством отображения Λ является вложение W^d в \mathbb{R}^m . Другими словами, образ W^d в \mathbb{R}^m ($V^d = \Lambda(W^d)$) не имеет самопересечений. При этом функция Λ — дифференцируема и имеет обратную дифференцируемую функцию Λ^{-1} , определенную на V^d : $W^d = \Lambda^{-1}(V^d)$. Тогда на V^d можно определить динамическую систему, т.к. $x_i = \Lambda^{-1}(z_i)$, а $x_{i+1} = F^\tau(x_i)$:

$$z_{i+1} = \Lambda(x_{i+1}) = \Lambda(F^\tau(\Lambda^{-1}(z_i))) \equiv \Psi(z_i), \quad z_i \in V^d,$$

где $\Psi : V^d \rightarrow V^d$. Легко видеть, что если в этом соотношении оставить последнюю компоненту, то получится покомпонентный вариант записи временного ряда: $x_i = G(x_{i-1}, \dots, x_{i-m})$. Данное соотношение можно использовать для решения задачи прогнозирования, поскольку для этого требуется знать только величину m .

Таким образом, мы имеем два преобразования, Φ и Ψ :

$$\begin{aligned}x_{i+1} &= F^r(x_i) \equiv \Phi(x_i), \quad x \in W^d \\z_{i+1} &= \Psi(z_i), \quad z \in V^d.\end{aligned}$$

Так как $z = \Lambda(x)$, то это различные представления одного и того же отображения. Поэтому характеристики, инвариантные относительно невырожденной замены, у обеих систем должны совпадать.

Следовательно, размерность аттрактора, энтропию динамической системы и некоторые другие инвариантные характеристики можно определить по измеряемым величинам.

В прикладном анализе временных рядов выделяются две основные задачи: задача идентификации и задача прогноза.

8.2 Задача идентификации

Задача идентификации при анализе наблюдаемых предполагает ответ на вопрос, каковы параметры системы, породившей данный временной ряд — корреляционная размерность, энтропия, показатели Ляпунова и др. (см. п. 7).

Поскольку энтропия — величина, характеризующая меру неупорядоченности системы, то она естественным образом оказывается связанной с понятием предсказуемости. При этом предсказуемость можно понимать (а) как нарастает фазовый объем первоначальной погрешности и (б) как увеличивается разница между истинной и возмущенной траекторией.

Энтропия K связана с первой трактовкой предсказуемости и определяет время предсказуемости поведения динамической системы:

$$T_K \sim \frac{1}{K} \log \frac{1}{\varepsilon}.$$

где ε — относительная погрешность данных о ее состоянии. Отметим, что зависимость от ε только логарифмическая. Вторая трактовка связана с понятием показателей Ляпунова. В этом случае также можно ввести горизонт прогноза:

$$T_\lambda \sim \frac{1}{\lambda_{\max}} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

где λ_{\max} — максимальный показатель Ляпунова. По порядку величины обе эти оценки совпадают. На практике однако значение времени предсказуемости считают по несколько упрощенным формулам: $T_K \sim K^{-1}$ и $T_\lambda \sim \lambda_{\max}^{-1}$.

8.3 Задача прогноза

Задача прогноза, видимо, одна из старейших задач анализа временных рядов. Она возникла задолго до появления теории динамических систем и относилась к проблеме предсказания в теории случайных процессов.

Задача прогноза имеет целью по данным наблюдений предсказать будущие значения измеряемых характеристик изучаемого объекта, т.е. составить прогноз на некоторый отрезок времени вперед. Сейчас разработано и обосновано несколько различных методов прогноза. Однако все они подразделяются на два основных типа: локальные и глобальные. Такое деление проводится по области определения параметров аппроксимирующей функции, рекуррентно устанавливающей следующее значение временного ряда по нескольким предыдущим [138].

Исторически первыми были разработаны глобальные методы, в которых на основе статистического анализа предлагалось использовать авторегрессию, скользящее среднее и др. Позже в рамках нелинейной динамики появились новые практические методики:

- сингулярный спектральный анализ (ССА) [165, 166];
- локальная аппроксимация (ЛА) [167];
- сочетание ССА–ЛА [168].

Метод ССА имеет строгое обоснование и используется главным образом для определения основных составляющих временного ряда, а также для подавления шума [165, 169]. Существуют также основанные на этом методе оригинальные алгоритмы прогноза [166].

Локальные методы прогноза, основанные на ЛА, имеют преимущество перед остальными в задачах, связанных с прогнозированием нерегулярных рядов [170, 171]. Применение ЛА не требует априорной информации о системе, породившей временной ряд, и нет необходимости в построении специфической модели, описывающей динамику исследуемого ряда (см. [40]).

С развитием нелинейной динамики оказалось, что задача прогноза значительно сложнее и часто не укладывается в схемы, представляемые теорией. В частности, длина обрабатываемого ряда должна быть достаточно большой, а шумовая компонента — малой величиной. Один из эффективных подходов, который позволяет преодолеть эти трудности и исследовать зашумленные ряды относительно небольшой длины, основан на методе ССА–ЛА [168].

Однако эти важные темы относятся к иной проблематике — реконструкции динамических систем по временным рядам, и поэтому их описание не входит в задачу данного курса. Основные результаты, относящиеся к затронутым в этом разделе вопросам, отражены в публикациях [40, 138, 157, 172–175] (см. также приведенные там ссылки).

9 Случайность и хаос

Статистические свойства детерминированных систем (см. п. 7.5) отражают случайный характер их динамики. Однако для таких систем будущее состояние однозначно определяется оператором эволюции и заданными начальными условиями. Поэтому правомерным является вопрос: в каком смысле динамические системы могут обладать случайными (или статистическими) свойствами?

Иногда можно услышать мнение, что хаос и случайность — это собирательные термины, обозначающие одно и то же явление непредсказуемости. Однако такой подход в принципе не верен, поскольку хаотические и случайные системы имеют глубокие различия. Теория Такенса (см. п. 8.1) позволяет отличить динамический процесс от чисто случайного, т.е. недетерминированного. Этот аспект оказывается очень важен и для приложений, поскольку он позволяет установить природу экспериментально полученного сигнала.

9.1 Конечномерные и бесконечномерные наблюдаемые

Последовательность измерений $\hat{x} = \{x_n\}_{n=0}^N$ называется детерминированно порожденной, если выполнены следующие условия [164, 176, 177]:

(а) существует конечномерная динамическая система f , точка y_0 и функция ϕ такие, что выполняется $\phi(f^n(y_0)) = x_n$ для всех $n = 0, 1, 2, \dots$;

(б) расстояние $\text{dist}(f^k x, f^k x') \leq \text{const} \cdot e^{\lambda k} \text{dist}(x, x')$, т.е. максимальный ляпуновский показатель (см. п. 7.1) для f является ограниченным;

(в) функция ϕ липшиц-непрерывна, т.е. $|\phi(x) - \phi(x')| \leq L|x - x'|$ для некоторой величины L , называемой константой Липшица.

Введем пространство B всех наблюдаемых как множество $\hat{x} = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|/2^n < \infty$. При соответствующем введении нормы пространство B будет полным нормированным линейным пространством. Зададим в B динамическую систему посредством отображения сдвига $\hat{x} \mapsto f\hat{x}$, где $f\hat{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Тогда получим универсальную динамическую систему, порождающую любую ограниченную последовательность наблюдений.

Рассмотрим предельное множество $A(\hat{x})$ и предельную емкость $D_0(A)$

наблюдаемой. Их нетрудно ввести, если рассмотреть произвольную последовательность \hat{x} как начальное состояние универсальной динамической системы в пространстве B . Если $D_0(A) < \infty$, то данной наблюдаемой соответствует конечномерная динамическая система. При выполнении дополнительного условия об ограниченности энтропии и максимального показателя Ляпунова рассматриваемый процесс будет детерминированно порожденным.

Таким образом, исследование наблюдаемого сигнала может дать ответ на принципиальный вопрос о конечномерности и детерминированности исследуемого процесса. Однако этим не исчерпывается значимость данного подхода.

9.2 К определению хаоса и случайности

Опираясь на понятия энтропии и размерности, хаотическую динамику можно определить иначе, чем это было сделано в п. 2.3. Такой подход был предложен Такенсом в работе [164] (см. также [178]). В известном смысле это определение физически лучше обосновано, поскольку оно опирается на более привычные понятия.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}_{n \geq 0}$, которая получена в результате измерений какого-либо установившегося процесса или является значениями динамической переменной системы (1), записанными в некоторые дискретные моменты времени n . Для этой последовательности может встретиться одно из трех возможных соотношений для энтропии: $H = 0$, $0 < H < \infty$ или $H \rightarrow \infty$.

Если система является динамической с компактным пространством состояний, то для нее значение $H \rightarrow \infty$ исключается. Это соотношение выполняется только если система эволюционирует стохастическим (случайным) образом. Когда $0 < H < \infty$, то говорят, что система обладает хаотическим поведением. Следовательно, динамическая система хаотична, если в пространстве состояний существует некоторое подмножество Ω такое, что любая траектория, которая начинается в Ω , имеет положительную энтропию. Наконец, при $H = 0$ в соответствующей системе наблюдается регулярная динамика.

Таким образом, данный подход отличается от других определений ха-

оса тем, что здесь дополнительно говорится о стохастической динамике. Однако при этом он включает два общих элемента: стационарная, периодическая и квазипериодическая динамика не хаотичны, и система с хаосом обладает чувствительной зависимостью от начальных условий. Это последнее утверждение вытекает из соотношения (8), которое связывает энтропию и экспоненциальную неустойчивость (см. п. 2.3).

10 Заключение

Развитие теории динамических систем во второй половине XX века привело к грандиозным последствиям не только в теоретической физике и математике, но и в естествознании в целом — открытию динамического хаоса и связанными с ним свойствами. Оказалось, что многие нелинейные системы, несмотря на полную детерминированность, т.е. отсутствие шумов, стохастических возмущений и т.п., могут демонстрировать поведение, подобное случайным процессам. Тем самым возникающая статистика поведения систем определяется исключительно особенностями динамики. И хотя предпосылки такой идеологии наметились еще более ста лет назад в работах А.М.Ляпунова и А.Пуанкаре, основные открытия и осмысление этого явления были сделаны в 60–80-х годах прошлого века.

Необходимо отметить, что для изучения хаотических систем классические аналитические средства, такие, например, как ряды теории возмущений, асимптотические методы и т.п., оказались непригодными. Так, подкову Смейла, с которой в известном смысле началось современное исследование хаотических явлений, невозможно описать соотношениями в математическом стиле XIX века. Для построения и анализа таких конструкций потребовалось разработать совершенно новые методы, развитие которых и привело к крупным открытиям в теории динамических систем.

Основной целью данного лекционного курса является описание различных подходов, используемых в настоящее время при анализе нелинейных хаотических динамических систем. Естественно, что целые направления остались за рамками нашего рассмотрения. В частности мы практически не затронули такие обширные разделы, как сценарии рождения хаоса, динамика одномерных отображений, пространственно-временной хаос и турбулентность, голоморфная динамика и фрактальные множества и др. Однако некоторые из них представлены в работах, учебных пособиях и монографиях, приведенных в списке литературы.

Главные достижения теории хаотических динамических систем можно кратко резюмировать следующим образом.

Доказано, что даже очень простые системы (как, например, система Лоренца) могут проявлять случайные свойства. Это в корне поменяло

представление о случайности, которая, как предполагалось, может возникать только в системах с большим числом степеней свободы.

Посредством анализа бильярдных задач был достигнут значительный прогресс в понимании происхождения случайности в газе твердых сфер и, как следствие, в обосновании эргодической гипотезы Больцмана.

На основе теории хаотических динамических систем удалось частично решить проблему возникновения необратимости в обратимых детерминированных уравнениях движения.

Доказано, что хаос может рождаться универсальными путями, независимо от природы системы. Это выдающееся открытие, подтвержденное также и экспериментально. Оно, в частности, привело к созданию метода ренорм-группы в теории динамических систем.

Найдено, что случайность может быть обусловлена как внутренними свойствами, так и внешними факторами, которые влияют на рассматриваемые системы. При этом посредством исследования временных рядов наблюдаемых всегда можно отличить случайное, стохастическое поведение систем от детерминированного хаоса и тем самым установить конечномерность изучаемого процесса.

Разработанные методы анализа временных рядов позволили практически использовать результаты теории динамических систем для расчета таких характеристик, как энтропия, показатели Ляпунова и размерность. Это дало возможность, используя только экспериментально полученные данные, определять горизонт прогноза рассматриваемого процесса и в определенных случаях предсказывать дальнейшую эволюцию системы. Данное направление в настоящее время приобретает все большую популярность в таких чисто прикладных областях, как финансовый анализ и медицина.

Наконец, нельзя не сказать и об эстетической привлекательности полученных результатов. Благодаря публикациям книг Б.Мандельброта [179], Х.-О.Пайтгена и П.Рихтера [180] компьютерные изображения фрактальных множеств, странных аттракторов и их областей притяжения открыли художественную сторону теории хаоса. Как заметил Д.Рюэль, это область исследования, в которой будут открыты новые гармонии [181].

Список литературы

- [1] Гинзбург В Л, в кн.: *Физика XX века. Развитие и перспективы*. Сб. статей. (М.: Наука, 1984) с. 281
- [2] Smale S, in *Differential and Combinatorial Topology* (Ed. S S Cairns) (Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1965) p. 63
- [3] Смейл С *УМН* **25** 113 (1970)
- [4] Аносов Д В *ДАН СССР* **125** 707 (1962); *ДАН СССР* **151**, 1250 (1963)
- [5] Аносов Д В *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны* (М.: Наука, 1967)
- [6] Шильников Л П *Докл. АН СССР* **160** 558 (1965)
- [7] Шильников Л П *Докл. АН СССР* **172** 298 (1967)
- [8] Синай Я Г *Докл. АН СССР* **153** 1261 (1963)
- [9] Синай Я Г *УМН* **25** 141 (1970)
- [10] Мухин Р Р *Очерки по истории динамического хаоса* (М.: Вест-Консалтинг, 2007)
- [11] Ruelle D, in: *Lecture Notes in Physics, Statistical Models and Turbulence* **12** 292 (1975)
- [12] Синай Я Г, Шильников Л П (Ред.) *Странные аттракторы*. Сб. статей. (М.: Мир, 1981)
- [13] Рабинович М И, Суцник М М *УФН* **160** 3 (199)
- [14] Landa P S, McClintock P V E *Physics Reports* **397** 1 (2004)
- [15] Лоскутов А *УФН* **177** 989 (2008)
- [16] Ruelle D, Takens F *Commun. Math. Phys.* **20** 167 (1971)
- [17] Хартман Ф *Обыкновенные дифференциальные уравнения* (М.: Мир, 1970)
- [18] Андронов А А, Понтрягин Л С *ДАН СССР* **14** 247 (1937)
- [19] Milnor J *Commun. Math. Physics* **99** 177 (1985)
- [20] Афраймович В С, в кн. *Нелинейные волны. Динамика и эволюция*. (Ред. А В Гапонов-Грехов, М И Рабинович) (М.: Наука, 1989) с.16
- [21] Гукенхеймер Дж, Холмс Ф *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (Москва–Ижевск, Инст. комп. иссл., 2002)
- [22] Арнольд В И, Афраймович В С, Ильяшенко Ю С, Шильников Л П, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 5* (М.: ВИНТИ, 1986) с.5
- [23] Eckmann J-P *Rev. Mod. Phys.* **53** 643 (1981)

-
- [24] Devaney R L *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (New York: Addison-Wesley Publ. Co., 1993, Second Edition).
- [25] Banks J, Brooks J, Cairns G, Davis G *Am. Math. Monthly* **99** 332 (1992)
- [26] Assaf IV D, Gadbois S *Am. Math. Monthly* **99** 865 (1992)
- [27] Колесов А Ю, Розов Н Х *УМН* **64** 125 (2009)
- [28] Синай Я Г *Современные проблемы эргодической теории* (М.: Наука, 1995)
- [29] Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в теорию динамических систем* (М.: МЦНМО, 2005)
- [30] Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в современную теорию динамических систем* (М.: Факториал, 1999)
- [31] Аносов Д В, Солодов В В, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 66* (М.: ВИНТИ, 1991) с.12
- [32] Kuznetsov S P *Phys. Rev. Lett.* **95** 144101 (2005)
- [33] Kuznetsov S P, Pikovsky A *Physica D* **232** 87 (2007)
- [34] Кузнецов С П *Нелинейная динамика* **5** 403 (2009)
- [35] Tucker W *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences, Ser.1 Math.* **32** 1197 (1999)
- [36] Tucker W *Found. of Compu. Math.* **2** 53 (2002)
- [37] Smale S *The Mathematics of Time. Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics* (Berlin, Springer, 1980)
- [38] Smale S, in: *The Chaos Avant-Garde. Memories of the Early Days of Chaos Theory* (Singapore, World Sci., 2000) p.7
- [39] Holmes P J, Moon F C *Trans. ASME, Ser.E* **50** 1021 (1983)
- [40] Лоскутов А Ю, Михайлов А С *Основы теории сложных систем* (Москва–Ижевск: РХД, 2007)
- [41] Заславский Г М *Гамильтонов хаос и фрактальная динамика* (Москва–Ижевск: РХД, 2010)
- [42] Алексеев В М *УМН* **24** 185 (1969)
- [43] Алексеев В М *Лекции по небесной механике* (Москва–Ижевск: РХД, 2001)
- [44] Levi M *Met. AMS* **214** 1 (1981)
- [45] Holmes P J. *Sound. Vib.* **84** 173, (1982)
- [46] Мун Ф *Хаотические колебания* (М.: Мир, 1990)

- [47] Пуанкаре А *Новые методы небесной механики* (М.: Наука, 1971)
- [48] Шильников Л П, Шильников А Л, Тураев Д В, Чуа Л *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1.* (Москва–Ижевск, Инст. комп. иссл., 2004). *Часть 2.* (Москва–Ижевск, Инст. комп. иссл., 2009)
- [49] Песин Я Б, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 2* (М.: ВИНТИ, 1985) с.123
- [50] Birkhoff G D *Collected Math. Papers* (N.Y.: Amer. Math. Soc., 1950)
- [51] Birkhoff G D *Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei* **1** 85 (1950)
- [52] Katok A *Publ. Math. de l'Institut des Hautes Études Sci.* **51** 137 (1980)
- [53] Шильников Л П *Мат. сб.* **81** 92 (1970)
- [54] Arnéodo A, Couillet P, Tresser C *Commun. Math. Phys.* **79** 573 (1981)
- [55] Arnéodo A, Couillet P, Tresser C *J. Stat. Phys.* **27** 171 (1982)
- [56] Гаврилов Н К, Шильников Л П *Матем. сб.* **88** 475 (1972)
- [57] Гаврилов Н К, Шильников Л П *Матем. сб.* **90** 139 (1973)
- [58] Гонченко С В, Шильников Л П (Ред.) *Гомоклинические касания* Сб. статей. (Москва–Ижевск, РХД, 2007)
- [59] Palis J, in *Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., vol.XIV* (American Math. Soc., 1970) p.221
- [60] Hirsch M, Pugh C, in *Global Analysis, Proc. Symp. in Pure Math., vol.XIV* (American Math. Soc., 1970) p.133
- [61] Нитецки З *Введение в дифференциальную динамику* (М.: Мир, 1975)
- [62] Newhouse S E, Palis J *Asterisque* **31** 44 (1976)
- [63] Palis J, Takens F *Inventiones Math.* **82** 397 (1985)
- [64] Palis J, Takens F *Annals of Mathe.* **125** 337 (1987)
- [65] Стенькин О В, Шильников Л П *Матем. сб.* **189** 125 (1998)
- [66] Newhouse S E *Proc. A.M.S. Symp. Pure Math.* **14** 191 (1970)
- [67] Newhouse S E *Topology* **13** 9 (1974)
- [68] Newhouse S E *Publ. Math. IHES* **50** 101 (1979)
- [69] Gonchenko S V, Shilnikov L P, Turaev D V *Chaos* **6** 15 (1996)
- [70] Гонченко С В, Тураев Д В, Шильников Л П *Труды МИАН* **216** 76 (1997)
- [71] Гонченко С В, Стенькин С В, Шильников Л П *Нелин. динамика* **2** 3 (2006)

- [72] Гонченко С В, Тураев Д В, Шильников Л П, в кн. *Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Том 67* (М.: ВИНТИ, 1999) с.69
- [73] Gaspard P, Gonchenko S V, Nicolis G, Turaev D V *Nonlinearity* **10** 409 1997
- [74] Gonchenko S V, Shilnikov L P, Turaev D V *Physica D* **62** 1 (1993)
- [75] Downarrowicz T, Newhouse S *Inventn. Math.* **160** 453 (2005)
- [76] Kaloshin V *Commun. Mat. Phys.* **211** 253 (2000)
- [77] Shilnikov A L, Shilnikov L P, Turaev D V *Int. J. Bifurcation and Chaos* **3** 1123 (1993)
- [78] Newhouse S, Palis J, Takens F *Publ. Math. IHES* **57** 5 (1983)
- [79] Афраймович В С, Шильников Л П, в кн. *Методы качеств. теории диф. ур.* (Горький: Горьк. гос. ун-т) с.3
- [80] Овсянников И М, Шильников Л П, *Матем. сб.* **130** 552 (1986)
- [81] Овсянников И М, Шильников Л П, *Матем. сб.* **182** 1043 (1991)
- [82] Palis J, Takens F *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)
- [83] Шильников Л П *Матем. сб.* **74** 378 (1967)
- [84] Боуэн Р *Методы символической динамики* (М.: Мир, 1979)
- [85] Рюэль Д *Случайность и хаос* (Москва–Ижевск, РХД, 2001)
- [86] Плыкин Р В, Сатаев Е А, Шлячков С В, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 66* (М.: ВИНТИ, 1991) с.100
- [87] Гонченко С В, Тураев Д В, Шильников Л П *Совр. матем. и ее приложения* **7** 92 (2003)
- [88] Mora L, Viana M *Acta Math* **71** 1 (1993)
- [89] Viana M, in: *Proc. of XIth Int. Congress of Math. Phys. (Paris, 1994)* (Intern. Press: Cambridge, MA, 1995) p.1142.
- [90] Viana M *Bull. Braz. Math. Soc.* **24** 13 (1993)
- [91] Palis J, Viana M *Ann. of Math.* **140** 207 (1994)
- [92] Grebogi C, Ott E, Pelikan S, Yorke J A *Physica D* **13** 261 (1984)
- [93] Плыкин Р В *Матем. сб.* **94** 243 (1974)
- [94] Плыкин Р В, *УМН* **39** 75 (1984)
- [95] Белых В Н, в сб. *Системы фазовой синхронизации* Ред. В.В.Шахгильдян, Л.Н.Белюстина (М.: Радио и связь, 1982) с.161

- [96] Бунимович Л А, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 2* (М.: ВИНТИ, 1985) с.173
- [97] Collet P, Levi Y *Commun. Math. Phys.* **93** 461 (1984)
- [98] Lozi R, *J. de Phys.* **39** 9 (1978)
- [99] Sataev E A *J. Math. Sci.* **95** 2564 (1999)
- [100] Misiurewicz M, in: *Nonlinear Dynamics* Ed. R.G.Helleman (New York: New York Acad. Sci., 1980, v.357) p.348
- [101] Pesin Y B *Ergodic Theory and Dynamical Syst.* **12** 123 (1992)
- [102] Lorenz E N *J. Atmos. Sci.* **20** 130 (1963)
- [103] Henon M, *Commun. Math. Phys.* **50** 69 (1976)
- [104] Benedicks M, Carleson L *Ann. Math.* **133** 73 (1991)
- [105] Кузнецов С П, Селезнев Е П *ЖЭТФ* **129** 400 (2006)
- [106] Morales C A *Annales de l'Institut Henri Poincaré* **13** 589 (1996)
- [107] Belykh V, Belykh I, Mosekilde E *Intern. J. Bifurcation and Chaos* **15** 356 (2005)
- [108] Kuznetsov S P *Chaos* **19** 013114 (2009)
- [109] Синай Я Г, в сб. *Нелинейные волны* Ред. А.В.Гапонов-Грехов (М.: Наука, 1979) с.192
- [110] Хакен Г *Синергетика* (М.: Мир, 1985)
- [111] Afraimovich V S, Shilnikov L P, in *Nonlinear Dynamics and Turbulence* Eds. G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph (New York: Pitman, 1983) p.1
- [112] Carrido R, Simó L *Lect. Notes in Phys.* **179** 1 (1983)
- [113] Анищенко В С, Вадивасова Т Е, Окрокверцхов Г А, Стрелкова Г И *УФН* **175** 163 (2005)
- [114] Афраимович В С, Быков В В, Шильников Л П *УМН* **35** 164 (1980)
- [115] Быков В В, в сб. *Методы качественной теории дифференциальных уравнений* (Горький: ГГУ, 1980) с.44
- [116] Арнольд В И *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1978)
- [117] Markus L, Meyer K R *Mem. Am. Math. Soc.* **144** 1 (1978)
- [118] Perry A, Wiggins S *Physica D* **71** 102 (1994)
- [119] Zaslavsky G M *Phys. Rep.* **371** 461 (2002)

- [120] Bunimovich L A *Nonlinearity* **21** T13 (2008)
- [121] Chirikov B V, Shepelyansky D L *Physica D* **13** 395 (1984)
- [122] Bunimovich L A *Chaos* **11** 802 (2001)
- [123] Altmann E G, Motter A E, Kantz H *Chaos* **15** 033105 (2005)
- [124] Маршал К *Задача трех тел* (Москва–Ижевск: РХД, 2004)
- [125] Bunimovich L A *Commun. Math. Phys.* **65** 295 (1979)
- [126] Корнфельд И П, Синай Я Г, Фомин С В *Эргодическая теория* (М.: Наука, 1980)
- [127] Eckmann J-P, Ruelle D *Rev. Mod. Phys.* **57** 617 (1985)
- [128] *Lyapunov Exponents*, in: Lect. Notes in Math. **1186** (Berlin: Springer, 1986)
- [129] Оселедец В И *Труды Моск. матем. об-ва* **19** 179 (1968)
- [130] Миллионщиков В М *Матем. сб.* **78** 179 (1969)
- [131] Песин Я Б *УМН* **32** 55 (1977)
- [132] Kaplan J L, Yorke J A *Lect. Notes in Math.* **730** 228 (1979)
- [133] Paladin G, Vulpiani A *Phys. Rep.* **156** 148 (1987)
- [134] Мартин Н, Ингленд Дж *Математическая теория энтропии* (М.: Мир, 1988)
- [135] Орнстейн Д *Эргодическая теория, случайность и динамические системы* (М.: Мир, 1978)
- [136] Биллингслей П *Эргодическая теория и информация* (М.: Мир, 1969)
- [137] Hentschel H G E , Procaccia I *Physica D* **8** 435 (1983)
- [138] Малинецкий Г Г, Потапов А Б *Современные проблемы нелинейной динамики* (М.: УРСС, 2000)
- [139] Лоскутов А Ю, Козлов А А, Хаханов Ю М *Прикладная нелинейная динамика* **17** 98 (2009)
- [140] Grassberger P, Procaccia I *Physica D* **9** 189 (1983)
- [141] Grassberger P, Procaccia I *Phys. Rev. A* **28** 2591 (1983)
- [142] Синай Я Г , в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 2* (М.: ВИНТИ, 1985) с.115
- [143] Синай Я Г *Введение в эргодическую теорию* (М.: ФАЗИС, 1996)
- [144] Синай Я Г *УМН* **46** 147 (1991)
- [145] Халмош П Р *Лекции по эргодической теории* (Ижевск: РХД, 1999)

- [146] Синай Я Г *УМН* **27** 21 (1972)
- [147] Bowen R, Ruelle D *Invent. Math.* **29** 181 (1975)
- [148] Ruelle D *Amer. J. Math.* **98** 619 (1976)
- [149] Bowen R *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms* (Lect. Notes in Math. **470**) (Springer: Berlin, 1975)
- [150] Young L-S *J. Stat. Phys.* **108** 733 (2002)
- [151] Benedicks M, Young L-S *Invent. Math.* **112** 541 (1993)
- [152] Zermelo E. *Ann. Phys.* **57** 485 (1896)
- [153] Больцман Л *Избранные труды* (М.: Наука, 1984)
- [154] Boltzmann L *Wied. Ann.* **60** 392 (1897)
- [155] Крылов Н С *Работы по обоснованию статистической физики* (М.-Л.: АН СССР, 1950)
- [156] Пустыльников Л Д *УМН* **50** 143 (1995)
- [157] Безручко Б П, Смирнов Д А *Математическое моделирование и хаотические временные ряды* (Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005)
- [158] Loskutov A, Mironyuk O *Int. J. Bifurcation and Chaos* **17** 3709 (2007)
- [159] Ардашев А В, Лоскутов А Ю *Практические аспекты современных методов анализа variability сердечного ритма* (М.: Медпрактика, 2010)
- [160] Лоскутов А, Котляров О *Валютный спекулянт* **11** 8 (2008)
- [161] Локутов А Ю *Экономи и мат. методы* **46** 58 (2010)
- [162] Gouesbet G, Meunier-Guttin-Cluzel S, Ménard O (eds.) *Chaos and Its Reconstruction* (New York: Nova Sci. Publ., 2003)
- [163] Packard N H , Crutchfield J P , Farmer J D , Shaw R S *Phys.Rev.Lett.* **45** 712 (1980)
- [164] Takens F, *Lect. Notes in Math.* **898** (Berlin: Springer 1981) p. 336
- [165] Vautard R, Yiou P, Ghil M *Physica D* **58** 95 (1992)
- [166] Данилов Д Л, Жиглявский А А (ред.) *Главные компоненты временных рядов: метод "Гусеница". Сб. статей.* (СПб: СПб ун-т, 1997)
- [167] Farmer J D, Sidorowich J J *Phys. Rev. Lett.* **59** 845 (1987)
- [168] Истомин И А, Котляров О Л, Лоскутов А Ю *Теор. и матем. физика* **142** 148 (2005)
- [169] Лоскутов А Ю, Истомин И А, Котляров О Л, Кузаян К М *Письма в Астр. журнал* **27** 867 (2001)

- [170] Farmer J D, Sidorowich J J, in: *Evolution, Learning, and Cognition*, ed. Y. C. Lee (World Sci.: Singapore, 1988) p. 277
- [171] Лоскутов А Ю, Котляров О Л, Истомина И А, Журавлев Д И *Вестн. Моск. ун-та, сер. Физ.-Астр.* **6** 3 (2002)
- [172] Abarbanel H D I, Brown R, Sidorowich J J, Tsimring L S *Rev. Mod. Phys.* **65** 1331 (1993)
- [173] Franses P H *Time series models for business and economic forecasting* (Cambridge Univ. Press: Cambridge, 1998)
- [174] Ghil M, Allen R M, Dettinger M D, et al. *Rev. Geophys.* **40** 1 (2002)
- [175] Shumway R, Stoffer D S *Time Series Analysis and its Applications* (Springer: Berlin, 2000)
- [176] Афраймович В С, Рейман А М, в кн. *Нелинейные волны. Динамика и эволюция.* Ред. А.В.Гапонов-Грехов, И.М.Рабинович (М.: Наука, 1989) с.238
- [177] Takens F, in: *Nonlinear Dynamics and Turbulence*, eds. G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph (New York: Pitman, 1983) p.314
- [178] Брур Х В, Дюмортье Ф, ван Стрин С, Такенс Ф *Структуры в динамике* (Москва–Ижевск: РХД, 2003) с.119
- [179] Мандельброт Б *Фрактальная геометрия природы* (М.: Ин-т комп. исслед., 2002)
- [180] Пайтген Х-О, Рихтер П Х *Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем* (М.: Мир, 1993)
- [181] Ruelle D *Math. Intelligencer* **2** 126 (1980)