

Динамика параметрически возмущаемых отображений

А.Ю.Лоскутов, С.Д.Рыбалко, А.К.Прохоров

Московский государственный университет, физический факультет, Москва

УДК 530.1.517.9

Аннотация

Рассматриваются отображения и их свойства при периодических воздействиях. Для одномерных полимодальных отображений получены аналитические условия, при выполнении которых они будут обладать предписанной динамикой. Путем численного исследования детально изучено поведение семейства одномерных квадратичных отображений при возмущении по параметру периодов 2 и 3. Построены соответствующие бифуркационные диаграммы.

1 Введение

Динамическая система может вводиться разными путями, одним из которых является преобразование определенной области числовой оси в себя. При этом эволюционный процесс описывается функцией, задающей отображение:

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Здесь через a обозначена совокупность всех возможных параметров, определяющих режим того или иного процесса. Иногда к отображению вида (1) приходят не из основных физических принципов, а на основе анализа экспериментальных данных или после ряда упрощений исходных уравнений. Отображения могут проявлять самые различные виды динамики: от простого, когда $\{x_n\} \rightarrow x_0$ (т.е. наблюдается стационарный режим), до чрезвычайно сложных, таких, как перемешивание.

В настоящей работе исследуется влияние малых периодических возмущений на отображение (1). Это обусловлено тем фактом, что любая физическая система подвержена тем или иным воздействиям. Статья построена следующим образом. После доказательства общих утверждений (часть 2) подробно рассматривается семейство

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) , \quad (2)$$

где $a \in (0; 4]$ и $x_n \in (0; 1)$. Детально изучено его поведение при возмущении по параметру периодов 2 и 3. Полученные при таком воздействии бифуркационные диаграммы демонстрируют гармонию хаоса и порядка и сравнимы по красоте с некоторыми фрактальными множествами, получаемыми через итерации комплексных функций.

2 Методы анализа возмущенных отображений

Пусть отображение, описывающее поведение некоторого процесса, имеет вид:

$$T_a : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a) , \quad (3)$$

где $x \in M \subset \mathbf{R}^n$, a — параметр из множества допустимых значений $A \subset \mathbf{R}$, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_j\}$ и $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_j\}$. Введем параметрическое возмущение как преобразование, $G : A \rightarrow A$. Тогда отображение (3) представится в виде:

$$\mathbf{T}_a : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a), \quad a \mapsto g(a) . \quad (4)$$

Возмущение назовем *периодическим* с периодом τ , если $a_{i+1} = g(a_i)$, $i = 1, \dots, \tau - 1$, и $a_1 = g(a_\tau)$. Тогда можно ввести множество $\mathbf{A} = \{\hat{a} \in \underbrace{A \otimes A \otimes \dots \otimes A}_\tau : \hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau), a_i \neq a_j, 1 \leq i, j \leq \tau, i \neq j, a_1, \dots, a_\tau \in A\}$, $\mathbf{A} \subset \mathbf{R}^\tau$. Поэтому

$$\mathbf{T} : T_{a_1} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_1) \equiv \mathbf{f}_1 , \quad \dots , \quad T_{a_\tau} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_\tau) \equiv \mathbf{f}_\tau . \quad (5)$$

Из выражения (5) непосредственно следует интересный результат.

ЛЕММА 2 [1, 3]. *Период t любого цикла возмущенного отображения (4) кратен периоду возмущения τ : $t = \tau k$, где k — положительное целое.*

В ряде работ (см., например, [1, 3, 4, 5]) было аналитически показано, что при $j = 1$ и $j = 2$ посредством периодических возмущений можно подавить хаос и стабилизировать определенные циклы отображений. Ниже будут рассматриваться только одномерные ($j = 1$) отображения. Для таких отображений удастся обобщить развитую в работах [1, 4, 5] теорию и эффективно использовать метод поиска возмущений, приводящих к стабилизации *заранее заданных* циклов в практических целях.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть отображение $T_a : x \mapsto f(x, a)$, $x \in M$, $a \in A$, удовлетворяет следующим свойствам:*

1) *существует подмножество $\sigma \subset M$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \sigma$ найдется значение $a^* \in A$, для которого $f(x_1, a^*) = x_2$;*

2) *существует критическая точка $x_c \in \sigma$ такая, что производная $\partial f(x, a)/\partial x|_{x=x_c} \equiv D_x f(x_c, a) = 0$ при любом $a \in A$.*

Тогда для любых $x_2, x_3, \dots, x_\tau \in \sigma$ найдутся такие x_1 и $a_1, a_2, \dots, a_\tau$, что цикл $(x_1, x_2, \dots, x_\tau)$ будет устойчивым циклом возмущенного отображения $\mathbf{T}_a$ при $\hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau)$.

В реальной системе параметры подвержены малым возмущениям внешней среды. Определим устойчивость описанного подхода к такому влиянию. Для этого оценим допустимые искажения в значении параметров $(a_1, a_2, \dots, a_\tau)$ и элементов цикла $(x_1, x_2, \dots, x_\tau)$. Пусть устойчивому циклу $(x_c, x_2, x_3, \dots, x_\tau)$ соответствует возмущение $(a_1, a_2, \dots, a_\tau)$. Предположим, что значения a_i слегка изменились: $(a'_1, a'_2, \dots, a'_\tau) = (a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_\tau + \Delta a_\tau)$, причем $|\Delta a_i| \leq \delta_a$. Найдем максимально допустимое значение δ_a , при котором возмущенный цикл сохраняет устойчивость и исследуем, как при этом исказится цикл, т.е. определим Δx_i для $(x'_1, x'_2, \dots, x'_\tau) = (x_c + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_\tau + \Delta x_\tau)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $f(x, a) \in C^2[M \times A]$ и возмущенное отображение $\mathbf{T}_a$ при $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\tau)$ имеет устойчивый цикл периода τ , $p =$*

$(x_1, x_2, \dots, x_\tau)$. Тогда, если $|\Delta a_i| \leq \delta_a = \frac{1}{tS_a L S_x^{\tau-1} \sum_{i=1}^{\tau} S_x^i}$, где $i = 1, 2, \dots, \tau$, $S_a = \max_{x,a} |D_a f(x, a)|$, $L = \max_{x,a} |D_x^2 f(x, a)|$, $S_x = \max_{x,a} |D_x f(x, a)|$, то это отображение имеет также устойчивый цикл $p' = (x_c + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_\tau + \Delta x_\tau)$ периода τ при $\hat{a}' = (a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_\tau + \Delta a_\tau)$, причем $|\Delta x_i| \leq \delta_x = \frac{1}{L S_x^{\tau-1}}$.

3 Семейство квадратичных отображений

Рассмотрим семейство квадратичных отображений $T_a : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

$$T_a : x \mapsto \varphi(a, x) = ax(1 - x), \quad (6)$$

которое называется логистическим. Оно моделирует многие физические явления (см., например, [6, 7, 8]) и обладает широким спектром динамических режимов. Введем в (6) параметрическое возмущение. Если его период равен τ , то, очевидно, можно записать, что

$$x_{n+1} = a_n x_n (1 - x_n), \quad a_n = a_{n \bmod \tau + 1}. \quad (7)$$

Ранее было показано [1, 3, 5], что возмущения $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\tau)$, действующие только на хаотическом множестве $\mathbf{A}_c = \underbrace{A_c \otimes A_c \otimes \dots \otimes A_c}_{\tau}$, могут стабилизировать динамику семейства (7). Иными словами, справедлив следующий точный результат.

ТЕОРЕМА 3 [3]. *Существует подмножество $\mathbf{A}_d \subset \mathbf{A}_c$ множества всех возмущений, действующих на A_c , такое, что если $\hat{a} \in \mathbf{A}_d$, то возмущенное отображение (7) имеет устойчивый цикл.*

Очевидно, что семейство отображений (6) удовлетворяет условиям теоремы 1 (см. выше). Для данного отображения множество σ — это интервал $[x_b, x_e]$, где x_b и x_e — решения уравнения $x_{int} = f(x, 4)$, где $x_{int} \neq 0$ — точка пересечения кривой $y = 4x(1 - x)$ и линии $y = x$. Таким образом, $[x_b, x_e] = [1/4, 3/4]$.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, не ограничиваясь условиями теоремы 1, (см. лемму 2). Допустим сначала, что $t = \tau$, т.е.

$p = (x_1, x_2, \dots, x_t)$. Тогда точки, формирующие этот цикл, будут подчиняться следующей системе уравнений:

$$a_1 = \frac{x_2}{x_1(1-x_1)} , \quad a_2 = \frac{x_3}{x_2(1-x_2)} , \quad \dots , \quad a_t = \frac{x_1}{x_t(1-x_t)} . \quad (8)$$

Ясно, что не для всех возможных $x_i \in (0; 1)$ полученные значения $a_i \in [0; 4]$. Однако если это верно, то для любого цикла $p = (x_1, x_2, \dots, x_t)$ можно найти значения параметров $(a_1, a_2, \dots, a_t)$, отвечающих существованию такого цикла в отображении (7). Тогда, если мультипликатор $|\beta(p)| = \left| \prod_{i=1}^t a_i(1-2x_i) \right| < 1$, то он устойчив. Поэтому

$$\beta(p) = \left| \prod_{i=1}^t \frac{x_{i+1}}{x_i(1-x_i)}(1-2x_i) \right| = \left| \prod_{i=1}^t \frac{1-2x_i}{1-x_i} \right| < 1 . \quad (9)$$

Если среди точек цикла существует критическая точка $x_c = 1/2$, то $(1 - 2x_c)/(1 - x_c) = 0$. В этом случае неравенство (9) выполняется всегда.

Множество значений $p = (x_1, x_2, \dots, x_t)$, для которых $a_i \in [0; 4]$ и справедливо неравенство (9), образует определенную область в координатном пространстве $\mathbf{R}^t$. Каждой точке этой области соответствует устойчивый цикл возмущенного отображения. Используя систему уравнений (8), можно получить соответствующую область в *параметрическом* пространстве $\mathbf{R}^t$.

В качестве примера рассмотрим период возмущения $\tau = 2$. Согласно лемме 2 цикл возмущенного отображения (7) может иметь период только $t = 2k$ при $k \geq 1$. Исследуем области существования таких устойчивых циклов в координатном и параметрическом пространствах при $k = 1, 2, 3$.

I. $k = 1$. Тогда период возмущения $\tau = 2$ совпадает с периодом устойчивого цикла $t = \tau = 2$. На основе (8) и (9) легко получить, что в пространстве (x_1, x_2) область его существования определяется следующей системой неравенств (рис. 1а):

$$\begin{aligned} 0 < x_2 < \frac{3x_1 - 2}{5x_1 - 3} , \quad 0 < x_1 < \frac{1}{3} , \\ 0 < x_2 < \frac{x_1}{3x_1 - 1} , \quad \frac{1}{3} < x_1 < \frac{3}{5} , \\ \frac{3x_1 - 2}{5x_1 - 3} < x_2 < \frac{x_1}{3x_1 - 1} , \quad \frac{3}{5} < x_1 < 1 . \end{aligned}$$

Чтобы построить соответствующую область в пространстве параметров (a_1, a_2) , необходимо преобразовать область на рис. 1а посредством соотношений (8) (рис. 1б). Видно, что область значений параметров $[3, 8; 4, 0]$ не пересекается с областью значений параметров, соответствующих циклам периода два (рис. 1б). Это объясняет почему в работе [3] (см. выше) не было найдено циклов периода два.

II. $k = 2$. В этом случае период устойчивого цикла равен 4, т. е. $p = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Из (7) следует, что

$$\begin{aligned} x_2 &= a_1 x_1 (1 - x_1), & x_3 &= a_2 x_2 (1 - x_2), \\ x_4 &= a_1 x_3 (1 - x_3), & x_1 &= a_2 x_4 (1 - x_4). \end{aligned} \quad (10)$$

Далее находим параметры a_1 и a_2 через два независимых значения:

$$a_1 = \frac{x_1 q_1 - x_3 q_3}{x_1 q_1^2 - x_3 q_3^2}, \quad a_2 = \frac{x_1}{a_1 q_3 (1 - a_1 q_3)}, \quad (11)$$

где $q_1 = x_1(1 - x_1)$, $q_3 = x_3(1 - x_3)$. Соотношение (11) можно использовать для построения области существования устойчивого цикла периода 4 в пространстве параметров (a_1, a_2) . Именно, выбрав произвольно x_1, x_3 , найдем a_1, a_2 , а также вычислим x_2, x_4 . Далее выберем лишь те значения x_1 и x_3 , для которых верно следующее:

$$0 < a_1 \leq 4, \quad 0 < a_2 \leq 4, \quad \left| \frac{1 - 2x_1}{1 - x_1} \frac{1 - 2x_2}{1 - x_2} \frac{1 - 2x_3}{1 - x_3} \frac{1 - 2x_4}{1 - x_4} \right| < 1. \quad (12)$$

Условия (12) с учетом (11) выделяют в пространстве (a_1, a_2) область, которая показана на рис. 2. На этом рисунке видны области пересечения отдельных "ветвей", которые соответствуют бистабильному поведению.

III. $k = 3$. Здесь период устойчивого цикла возмущенного отображения (7) равен 6, т. е. $p = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Поскольку возмущение по-прежнему задается двумя параметрами (a_1, a_2) , то точки цикла p должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{x_2}{x_1(1 - x_1)} = \frac{x_4}{x_3(1 - x_3)} = \frac{x_6}{x_5(1 - x_5)} \\ a_2 &= \frac{x_3}{x_2(1 - x_2)} = \frac{x_5}{x_4(1 - x_4)} = \frac{x_1}{x_6(1 - x_6)} \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая (13), находим:

$$Ax_5^5 - Bx_5^4 + Cx_5^3 - Dx_5^2 + Ex_5 - F = 0 \quad (14)$$

где $A = q_1$, $D = x_3q_3^2 + x_3q_3 + q_1^2$, $B = 2q_1 + x_3q_3$, $E = x_3q_3^2$, $C = q_1 + q_1^2 + 2x_3q_3$, $F = x_1q_1q_3(q_3 - q_1)$. Теперь, определяя $x_5 = f(x_1, x_3)$ из уравнения (14), при помощи соотношений (13) легко получить все оставшиеся параметры цикла: a_1, a_2, x_2, x_4, x_6 . Если среди всех полученных таким образом циклов выбрать только такие, что $x_i \in (0; 1)$, $i = 1, \dots, 6$, $a_1, a_2 \in [0; 4]$, и $|\beta(p)| < 1$, то можно построить область существования устойчивого цикла периода 6 возмущенного отображения (7) в пространстве параметров (a_1, a_2) . Эти результаты представлены на рис. 2.

Общая картина диаграммы, построенная *численно*, представлена на рис. 2. Отчетливо видны области аналитически найденных периодов $t = \tau, 2\tau$ и 3τ (см. рис. 1, 2).

Рассмотрим теперь период возмущения $\tau = 3$. Координаты устойчивого цикла $p = (x_1, x_2, x_3)$ должны удовлетворять условиям

$$0 < \frac{x_2}{x_1(1-x_1)} \leq 4, \quad 0 < \frac{x_3}{x_2(1-x_2)} \leq 4, \quad 0 < \frac{x_1}{x_3(1-x_3)} \leq 4, \quad (15)$$

$$0 \leq x_{1,2,3} \leq 1, \quad \left| \frac{(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)} \right| < 1.$$

Чтобы построить область в координатном пространстве (x_1, x_2, x_3) , соответствующую данным циклам, необходимо отобразить в единичном кубе $[0 : 1] \times [0 : 1] \times [0 : 1]$ линии пересечения поверхностей

$$x_2 = 4x_1(1 - x_1), \quad x_3 = 4x_2(1 - x_2), \quad x_1 = 4x_3(1 - x_3),$$

$$x_3 = \frac{3x_1x_2 - (x_1 + x_2)}{7x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 1} \quad (\text{случай } +1), \quad (16)$$

$$x_3 = \frac{3(x_1 + x_2) - 5x_1x_2 - 2}{5(x_1 + x_2) - 9x_1x_2 - 3} \quad (\text{случай } -1).$$

На рис. 3 путем определения линий пересечения поверхностей (16) и с учетом условий (15) построен скелет искомой области.

Аналогичную область в пространстве параметров можно получить, отобразив соответствующее множество из (x_1, x_2, x_3) в (a_1, a_2, a_3) при помощи преобразований (8) при $t = 3$.

Полученный результат показан на рис. 4.

Вычисления для устойчивых циклов большей кратности ($t = 2\tau, 3\tau$ и т. д.) оказались значительно более громоздкими. На рис. 5 показано сечение пространства параметров (a_1, a_2, a_3) плоскостью $a_1 = 3, 5$.

4 Заключительные замечания

В данной работе рассмотрены достаточно общие свойства параметрически возбуждаемых отображений. Показано, что исследование таких отображений можно существенно упростить. Для одномерных полимодальных отображений получены условия, при выполнении которых такие отображения будут обладать предписанной динамикой. Таким образом, в общем виде решена проблема управления системами, которые эффективно описываются полимодальными преобразованиями.

Детально изучена динамика семейства одномерных квадратичных отображений при периодическом возмущении по параметру. Показано, что при воздействии периодов 2 и 3 поведение семейства качественно изменяется. Это выражается в двух основных фактах.

1. Для возмущенного отображения характерно свойство мультистабильности.

2. При значениях параметров из области хаотического поведения исходного отображения, возмущенная система становится регулярной. Это проявляется в рождении устойчивых циклов небольшого периода. Более того, указанные процессы изменения динамики являются устойчивыми в том смысле, что множества значений возмущаемых параметров образуют определенные области.

Список литературы

- [1] A.Yu.Loskutov, S.D.Rybalko. Parametric perturbations and suppression of chaos in n -dimensional maps.— *Preprint ICTP IC/94/347*, Trieste, Italy, 1994.
- [2] A.Yu.Loskutov. Non-feedback controlling complex behaviour: an analytic approach.— In: *Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results*. Ed. J.Awreicewicz.— Springer, Berlin, 1995, p.125-150.
- [3] A.Yu.Loskutov, A.I.Shishmarev. Control of dynamical systems behavior by parametric perturbations: an analytic approach.— *Chaos*, 1994, v.4, No2, p.351-355.
- [4] А.Ю.Лоскутов, А.И.Шишмарев. Об одном свойстве семейства квадратичных отображений при параметрическом воздействии.— *Успехи матем. наук*, 1993 т.48, вып.1, с.169-170.
- [5] A.N.Derjugin, A.Yu.Loskutov, V.M.Tereshko. Inducing stable periodic dynamics by parametric perturbations.— *Fractals, Solitons, and Chaos*, 1996, v.7, No10, p.1-13.
- [6] J.Guckenheimer, P.Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*.— Springer, Berlin, 1990 (Third printing).
- [7] П.Берже, И.Помо, К.Видадь. *Порядок в хаосе*.— М., Мир, 1991.
- [8] А.Н.Шарковский, Ю.Л.Майстренко, Е.Ю.Романенко. *Разностные уравнения и их приложения*.— Киев, Наукова думка, 1986.

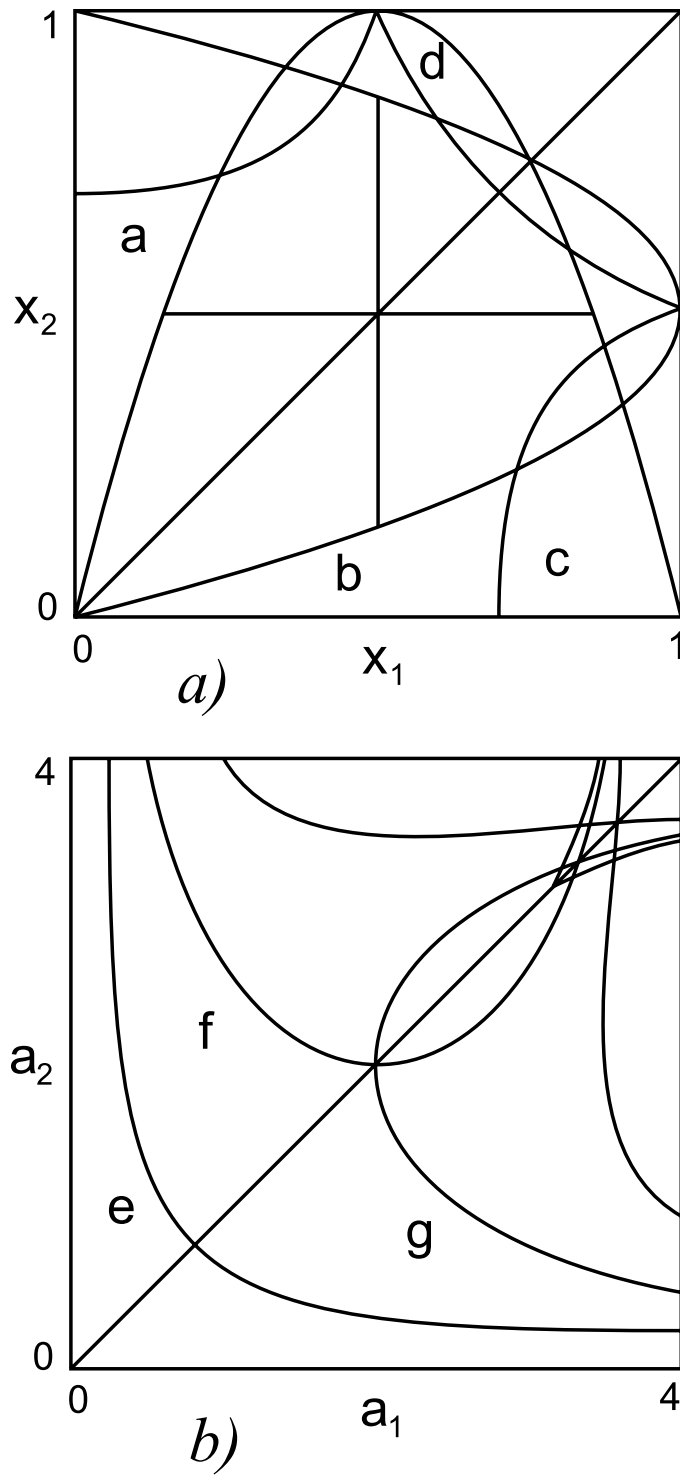


Рис. 1: Область существования устойчивых циклов периода 2 возмущенного ($\tau = 2$) квадратичного отображения, задаваемая кривыми $x_2 = 4x_1(1 - x_1)$ (a), $x_1 = 4x_2(1 - x_2)$ (b), $x_2 = (3x_1 - 2)/(5x_1 - 3)$ (c), $x_2 = x_1/(3x_1 - 1)$ (d), в пространстве (x_1, x_2) и кривыми $a_2 = 1/a_1$ (e), $a_2 = 8/[a_1(4 - a_1)]$ (f), $a_1 = 8/[a_2(4 - a_2)]$ (g) в параметрическом пространстве (a_1, a_2) .

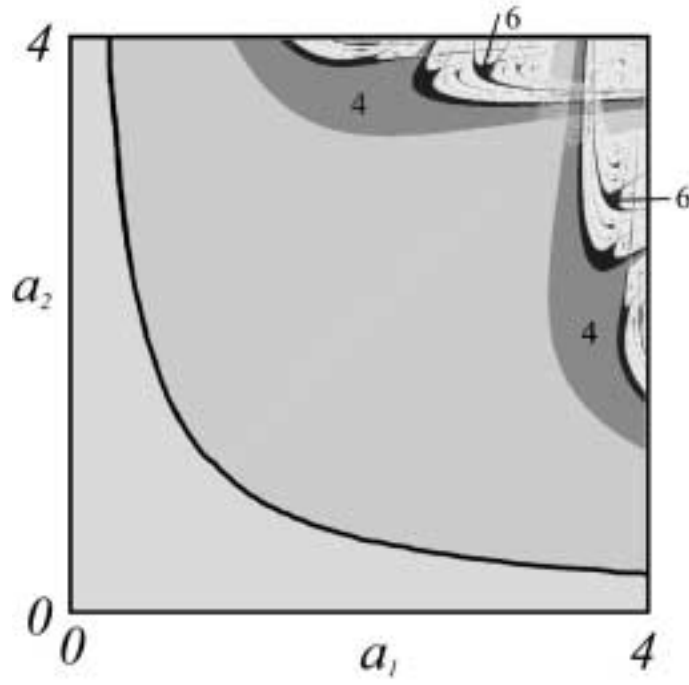


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма отображения (7)

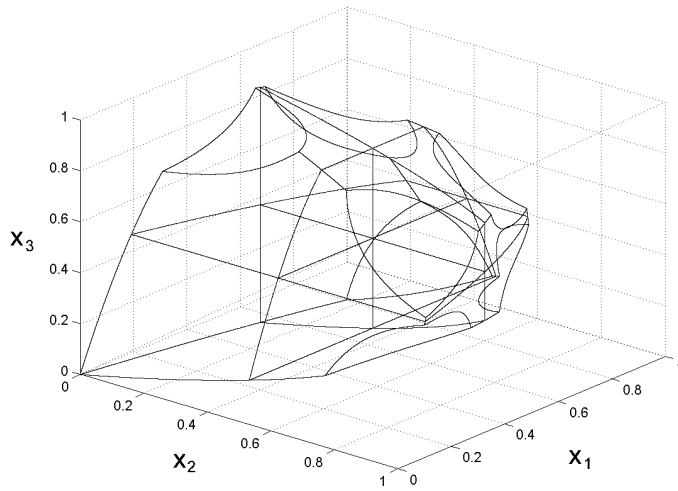


Рис. 3: Каркас области значений координат устойчивых циклов $p = (x_1, x_2, x_3)$ отображения (7) при периоде возмущения $\tau = 3$.

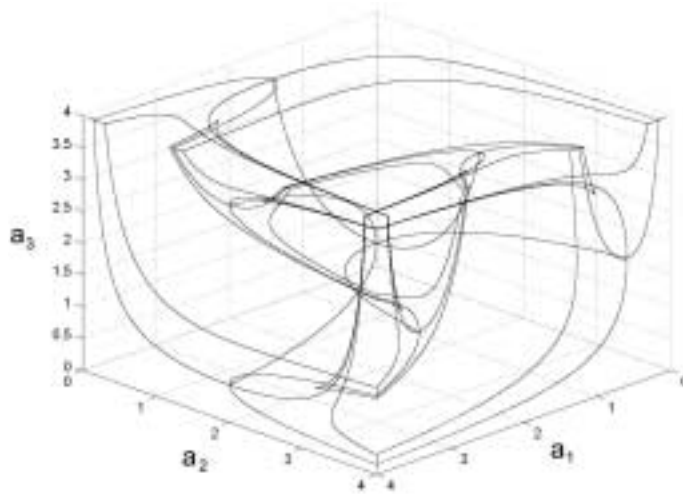


Рис. 4: Каркас области значений параметров возмущений (a_1, a_2, a_3) соответствующих устойчивым циклам периода 3 отображения (7) при периоде возмущения $\tau = 3$.

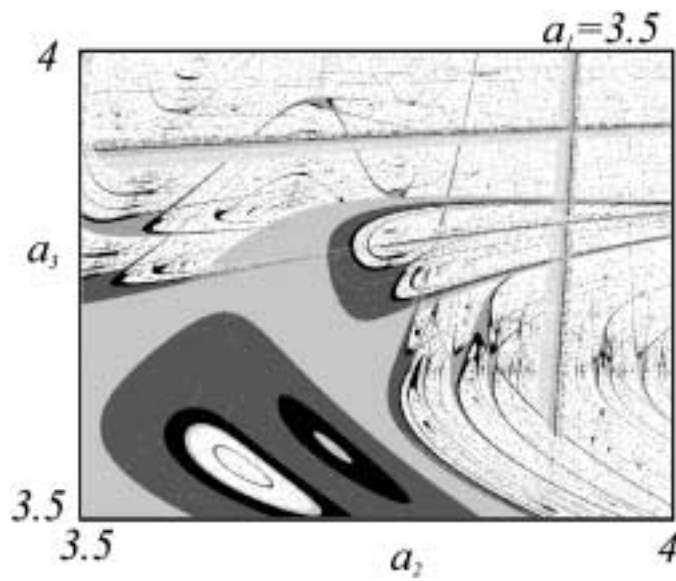


Рис. 5: Бифуркационная диаграмма отображения (7) при периоде возмущения $\tau = 3$ в области значений параметров $[3.5; 4]$.