Динамика неоднородных цепочек связанных квадратичных отображений

А.Ю. Лоскутов, А.К. Прохоров, С.Д. Рыбалко

Московский государственный университет, физический факультет, Москва 119899

Аннотация

В работе разработан новый достаточно эффективный метод локального анализа динамики связанных отображений. В отличие от ранее предлагаемых он позволяет наглядно исследовать эволюцию областей синхронизации и сложного поведения распределенной среды, описываемой совокупностью отображений. Эффективность данного метода продемонстрирована на примерах кольцевой и потоковой моделях диффузионно связанных квадратичных отображений. Анализ кольцевой цепочки при наличии дефектов пространства позволил обнаружить ряд новых явлений глобального поведения.

Ключевые слова: распределенные среды, пространственно-временной хаос, решетки связанных отображений.

1 Введение

Исследование решеток связанных отображений как моделей распределенной среды в последние годы приобрело огромную популярность (см., например, [1-5]). Элементы решетки при этом представляют собой точки физического пространства, а характер связи между ними моделирует взаимодействие исходя из основных физических принципов. При таком подходе возникает ряд проблем, основными из которых являются адекватная замена непрерывного физического пространства дискретным аналогом и выбор правильный связи. Однако даже при удачном выборе полученная решеточная модель далеко не всегда описывает богатство всех явлений, наблюдаемых в распределенных системах. Поэтому зачастую прибегают к рассмотрению таких систем с законом эволюции в элементах и связью, чтобы при изменении управляющих параметров они демонстрировали широкий спектр явлений, присущих распределенной среде [1, 2].

Решеточные системы возникают не только при рассмотрении распределенных сред, но также и при описании процессов, происходящих в системах, имеющих существенно дискретную структуру как по пространству так и по времени. К таким моделям непосредственно приводит ряд задач теории синхронизации радиогенераторов, биологии, медицины, а также изучение поведения клеточных автоматов и нейронных сетей [4]

В зависимости от размерности исходной моделируемой системы решетки сцепленных отображений могут быть одномерными, двумерными или трехмерными. В данной работе изучаются только одномерные решетки, т.е. линейные цепочки, представляющие собой совокупность элементов по определенному закону взаимодействующие друг с другом.

При построении решеток связанных отображений прежде всего необходимо выбрать вид отображения, которое задет временну́ю эволюцию в каждом элементе. Такой выбор отображения определяет локальное фазовое пространство X, на котором действует преобразование $f : X \to X$,

$$x \longmapsto f(x), \quad x \in X. \tag{1}$$

Фазовым пространством всей решетки является прямое произведение всех локальных пространств отдельных элементов. В одномерном случае все элементы можно расположить на прямой и пронумеровать одним индексом. Тогда фазовое пространство такой цепочки, включающей N элементов, можно записать как $\mathcal{X} = \bigotimes_{i=1}^{N} X_i$. Таким образом, состояние цепочки задается вектором $\xi = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathcal{X}$.

Второй основной задачей построения решеток отображений является определение связей между элементами. Естественно, что связь должна задавать влияние значений элементов всей решетки на последующие значения отдельно взятого элемента. В одномерном случае, т.е. для цепочек, связь можно определить отображением:

$$x_i \longmapsto g(x_1, \ldots, x_N), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2}$$

Таким образом, динамика цепочки связанных отображений может быть представлена в виде композиции двух отображений (1) и (2). Тогда за один шаг по времени значение i-го элемента будет изменяться по закону

$$x_i \longmapsto g\Big(f(x_1), \ldots, f(x_N)\Big), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3}$$

а поведение всей цепочки распадается на временно́е, задаваемое отображением $f(x)$, и пространственное, задаваемое преобразованием $g(x_1, \ldots, x_N)$.

Хотя большинство результатов, относящихся к связанным отображениям получены для такого разложения, было бы совершенно неправильно утверждать, что это ограничение является общим. Например, при дискретизации по времени некоторых систем связанных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, описывающих реальную распределенную среду, возникают системы отображений, эволюция которых определяется преобразованием

$$x_i \longmapsto f(x_i) + \bar{g}(x_1, \ldots, x_N), \quad i = 1, \ldots, N, \tag{4}$$

где функция $f(x)$ по-прежнему определяет временну́ю динамику, а $g(x_1, \ldots, x_N)$ задает изменение значения элемента x_i в зависимости от текущего состояния. При таком подходе временно́е и пространственное преобразования действуют одновременно.

В литературе, посвященной данной теме, наиболее популярными системами являются одномерные цепочки *диффузионно связанных отображений* [1-5]. Диффузионная связь означает, что состояние элементов изменяется лишь в зависимости от значений ближайших соседей. В этом случае для цепочки вида (3) динамика задается отображением в следующей форме:

$$x_i \longmapsto f(x_i, a) + \frac{\varepsilon}{2}\Big(f(x_{i-1}, a) - 2f(x_i, a) + f(x_{i+1}, a)\Big), \tag{5}$$

где ε — коэффициент диффузии. В ряде работ в качестве функции $f(x, a)$ рассматривалось квадратичное преобразование $f(x, a) = 1 - ax^2$ (см., например, [1-4] и приведенные там ссылки). В зависимости от значений параметров $a \in [0; 4]$ и $\varepsilon \in [0; 1]$ оно может проявлять очень широкий спектр глобального поведения: от синхронизации всех элементов, пространственной и временно́й периодической динамики, до пространственно-временного хаоса.

Наряду с цепочками диффузионно связанных отображений вида (5) часто исследуется поведение отображений вида

$$x_i \longmapsto f(x_i, a) + \frac{\varepsilon}{2}\left(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}\right), \tag{6}$$

где $x \in [0; 1]$, a — параметр нелинейности и ε — коэффициент взаимодействия между элементами. Такой выбор связи означает, что в отображении (6) аналогично преобразованию (4) пространственное и временное действия происходят одновременно.

Помимо указанных видов взаимодействия иногда рассматривается так называемая потоковая модель, аппроксимирующая свободное течение жидкости. В этом случае цепочка представляет собой систему односторонне связанных отображений [5-8]:

$$x_i \longmapsto f(x_i, a) + \varepsilon\Big(f(x_{i-1}, a) - f(x_i, a)\Big), \tag{7}$$

где $f(x, a)$ задает эволюцию каждого элемента цепочки. Для $f(x, a) = 1 - ax^2$ это преобразование в зависимости от значений параметров a и ε проявляет широкий спектр пространственно-временного поведения, к которым относится пространственный хаос и периодичность по времени, пространственные (и временные) периодические и квазипериодические структуры, а также определенные пространственно-временные формы. В число последних входят различные виды образований: от отдельных структур, окруженных хаосом, до развитой пространственно-временной хаотичности.

Очевидно, что для любой цепочки необходимо указывать ее поведение на границе. Наиболее часто исследуемыми системами являются связанные отображения со свободными границами или периодическими граничными условиями. Свободные граничные условия задаются соотношениями $x_0 = x_{N+1} \equiv 0$ (или $x_0 \equiv 0$ для систем вида (7)). При периодических граничных условиях необходимо положить $x_k = x_{N+k},\ k = 1, \ldots, N$.

Если параметры отображений в решетке различны, то такая система уже не будет однородной, и ее исследование является намного более сложной задачей [9]. Практически во всех работах, посвященных изучению диффузионно взаимодействующих отображений, исследуются (и, как правило, только численно) однородные решетки. Однако, очевидно, с физической точки зрения однородность пространства (в данном случае идентичность всех элементов или значений параметров в составляющих решетку элементах) — это идеализация, принятая для упрощения анализа. Поэтому представляет большой интерес определить, как качественно будет изменяться динамика системы при появлении неоднородностей. При этом неоднородности могут быть самые различные: от отдельных дефектов до периодической неоднородности по всему пространству. Под дефектами в данной работе понимается отличие значений параметров в некоторых элементах, составляющих решетку. Некоторые примеры таких неоднородных распределенных систем рассмотрены в последней части данной работы.

С математической точки зрения решетки связанных отображений с конечным числом элементов представляют собой динамическую систему с конечным числом степеней свободы. Формально для таких систем разработан богатый аппарат аналитического и численного исследования. Однако, если N достаточно велико, вычисление основных характеристик динамической системы либо очень громоздко, либо в принципе невозможно. Более того, многие величины, которые необходимо рассчитать для динамических систем (метрическая энтропия, спектр показателей Ляпунова, скорость убывания временных корреляций и др.) отражают характер ее *асимптотического поведения* при $t \to \infty$ и в целом по пространству [10,11]. Однако для систем связанных отображений знание указанных величин не представляет значительного интереса. Более важно найти характеристики, определяющие локальные свойства таких систем и их эволюцию во времени. Ряд авторов предлагали способы наблюдения за эволюцией решеточных моделей от методов визуального анализа до расчета локальных показателей Ляпунова (см., например, [12,13] и цитируемую там литературу).

В данной работе развивается новый метод анализа решеток связанных отображений, позволяющей определять поведение отдельных элементов и динамику всей системы в целом. Он позволяет, в отличие от других методов исследовать локальное поведение отдельных элементов распределенной системы и эволюцию глобальной динамики всего фазового пространства. Метод основан на разбиении всего временно́го интервала на короткие отрезки времени, на которых проводится анализ степени непериодичности траекторий всех элементов решетки. Это дает возможность определять образование областей синхронизации, их временно́й период, трансформацию со временем и разрушение путем пространственной «хаотизации». Данная работа является продолжением исследований неоднородных решеток связанных отображений, начатых в [9].

2 Локальный критерий динамики связанных отображений

Хотя настоящая работа посвящена исследованию одномерных цепочек связанных отображений, представленный в данной части метод может быть использован для исследования и многомерного случая. По построению, этот метод позволяет анализировать состояние элемента пространства распределенной системы на некотором малом отрезке времени на основе знания временно́й последовательности в данной точке.

В процессе временно́й эволюции значения каждого элемента решетки в последовательные моменты времени образуют временной ряд:

$$x_i^1, x_i^2, x_i^3, \ldots, x_i^n, \ldots \tag{8}$$

где i — номер элемента, а n — дискретное время. Для того, чтобы выявить периодичность этого ряда и определить как изменяется степень периодичности со временем, необходимо, очевидно, взять только некоторый отрезок этого ряда и попытаться выяснить насколько данный отрезок ряда близок к периодическому. Разбивая весь ряд на подобные небольшие отрезки одной длины мы производим определенное огрубление по времени. Анализируя периодичность ряда на каждом таком отрезке и выражая ее некоторым числом, можно проследить эволюцию данной характеристики при переходе от одного отрезка к другому.

Опишем теперь данную процедуру более подробно. Пусть T — количество элементов в ряде, т.е. $x_1, x_2, \ldots, x_T$ (для удобства мы опускаем индекс i обозначающий его положение). Разобьем его на одинаковые временны́е интервалы τ. Выберем T и τ так, чтобы $T = k\tau$, где k — некоторое целое. Теперь исследуем каждый кусок ряда длиной τ на периодичность. Для этого с каждым отрезком ряда $x_1, \ldots, x_\tau$ проделаем следующую процедуру:

1. Сравним его со специально построенным рядом $x_1, x_1, x_1 \ldots, x_1$, т.е. таким, все элементы которого равны x_1. Результат сравнения выразим в виде числа λ_1. Способ вычисления λ_1 будет представлен ниже. Сейчас пока для нас важно, чтобы λ_1 обладало следующим свойством: чем λ_1 меньше, тем отрезок ряда ближе к построенному $x_1, x_1, x_1 \ldots, x_1$.

2. Сравним искомый ряд с рядом $x_1, x_2, x_1, x_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots$, т.е. с состоящим из периодических подпоследовательностей периода 2. Результат выразим числом λ_2.

3. Проделаем аналогичную операцию для рядов, составленных из трех элементов x_1, x_2, x_3, четырех элементов x_1, x_2, x_3, x_4 и т.д. вплоть до $x_1, x_2, \ldots, x_{\tau/2}$. Результаты сравнения также выразим числами $\lambda_3, \lambda_4, \ldots, \lambda_{\tau/2}$, которые вновь будут отражать некоторую степень отклонения исследуемого ряда (8) от модельного, составленного из отдельных последовательных его элементов.

4. Найдем величину

$$\lambda \equiv \lambda_{min} = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\tau/2}\}. \tag{9}$$

В общем виде сравнительный показатель λ_p для каждого $p = 1, \ldots, \tau/2$ вычисляется как

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i+1}^{\tau} \left(x_i - x_{i \bmod (p+1)}\right)^2}{\tau - p}} \tag{10}$$

Легко видеть, что λ_p — это среднеквадратичное отклонение элементов остатка исходного ряда $x_{p+1}, \ldots, x_\tau$ от модельного периодического ряда $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$. Согласно (10) при каждом p выполняется $\lambda_p \geq 0$. Ясно, что если для некоторого p имеет место равенство $\lambda_{min} = \lambda_p = 0$, то ряд $x_1, \ldots, x_\tau$ является периодическим с периодом, кратным p. Чтобы точно определить период исходного ряда, необходимо остановить процедуру вычисления показателей λ_p на первом значении p, при котором $\lambda_p \simeq 0$. Если, однако, в процессе вычисления получим $\lambda = \min\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\tau/2}\} > 0$, то можно с определенностью сказать, что ряд $x_1, \ldots, x_\tau$ не будет периодическим. Значение p, на котором достигается данный минимум, можно назвать периодом, который приближает данный апериодический ряд. Рассчитав значения λ для отдельных отрезков величины τ, можно проследить их динамику на всем промежутке длины T. Вычисляя λ и периоды, на которых достигается минимум, для всех точек цепочки, можно эффективно выявлять области синхронизации в пространстве рассматриваемой системы сцепленных отображений и динамику отдельных элементов.

Легко понять, что предлагаемый метод анализа решеток связанных отображений, сторого говоря, не является точным. Во-первых, необходимо удачно выбрать значение τ, т.е. длину анализируемого отрезка. Это можно сделать, вычисляя наборы λ_p для различных τ, выявив таким образом наиболее подходящее значение τ. Другим недостатком является тот факт, что показатель λ_{min} будет положительным для элементов, динамика которых квазипериодична. Тем не менее он будет достаточно близок к нулю, так как квазипериодическое движение можно сколь угодно точно приблизить периодическим. Однако поскольку нас интересует качественная картина распределения λ_{min} а не конкретные значения, то данный недостаток не является столь существенным.

3 Примеры однородных систем

Продемонстрируем эффективность предложенного метода на некоторых хорошо известных примерах.

3.1 Потоковая модель

В качестве первой системы исследуем различные виды динамики потоковой модели (7). Как уже упоминалось, цепочка (7) обладает широким спектром различных режимов поведения в зависимости от степени нелинейности, задаваемой параметром a, и значением коэффициента диффузии ε. Более того, можно аналитически вычислить наиболее простые виды предельного поведения. Остановимся на этом подробнее.

Исследуемую модель можно выразить в виде итерационного соотношения:

$$x^i_{n+1} = f(x^i_n, a) + \varepsilon \left(f(x^{i-1}_n, a) - f(x^i_n, a) \right), \ i = 1, \ldots, N, \tag{11}$$

где n — дискретное время, i — пространственная координата. Пусть $f(x, a) = 1 - ax^2$, а качестве граничных условий возьмем $x^0 \equiv 0$, хотя конкретное значение не влияет на результаты качественного исследования.

Общее состояние системы (11) в момент времени n, очевидно, задается N-мерным вектором $\xi_n = (x^1_n, x^2_n, \ldots, x^N_n)$. Следовательно, динамика всей цепочки выражается некоторым преобразованием фазового пространства $\mathcal{X}$ в себя: $F : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}$, $\xi_{n+1} = F(\xi_n)$. Из построения модели ясно, что $F = g \circ f$ (см. (1) и (2)). Формально (см. выше) решетка (11) является динамической системой с дискретным временем и N степенями свободы. Следовательно, изучение устойчивых стационарных и периодических состояний сводится к анализу спектра собственных значений матрицы Якоби $\mathrm{D}F$ и ее степеней $\mathrm{D}F^{(p)}$, где p — значение исследуемого периода. Так как в дальнейшем нам понадобится выражение для матрицы $\mathrm{D}F$, выпишем его явно:

$$\mathrm{D}F(\xi) = \begin{pmatrix} -(1-\varepsilon)2ax^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon & -(1-\varepsilon)2ax^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varepsilon & -(1-\varepsilon)2ax^3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -(1-\varepsilon)2ax^N \end{pmatrix} \tag{12}$$

Заметим, что матрица $\mathrm{D}F$ является треугольной. Отсюда следует то, что все ее степени $\mathrm{D}F^{(p)}$ также являются треугольными матрицами.

Вычислим теперь однородные стационарные состояния модели (7). Однородность означает, что при любом $i = 1, \ldots, N$ выполняется $x^i_n = x^*_n$, а стационарность выражает независимость однородного состояния от времени, т.е. $x^i_n = x^*_n \equiv x^*$. Следовательно, значения x^* должны подчинятся условию:

$$x^* = f(x^*, a) + \varepsilon(f(x^*, a) - f(x^*, a)) = f(x^*, a). \tag{13}$$

Иными словами, x^* — это неподвижные точки отображения, задаваемого $f(x,a)$:

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2a}. \tag{14}$$

Таким образом, система (7) обладает двумя однородными состояниями: $\xi_1 = (x^*_1, x^*_1, \ldots, x^*_1)$ и $\xi_2 = (x^*_2, x^*_2, \ldots, x^*_2)$. Их устойчивость определяется величинами собственных значений матриц $\mathrm{D}F(\xi_1)$ и $\mathrm{D}F(\xi_2)$. Поскольку $\mathrm{D}F(\xi)$ — треугольная матрица, то из (12) найдем, что все собственные значения $\lambda_i \equiv \lambda_1 = -(1-\varepsilon)2ax^*_1$ для ξ_1, и $\lambda_i \equiv \lambda_1 = -(1-\varepsilon)2ax^*_2$ для ξ_2. Состояния ξ_1 и ξ_2 устойчивы если $|\lambda_{1,2}| \leq 1$. Или

$$\begin{aligned} -1 < -(1-\varepsilon)2ax^*_1 < 1, \\ -1 < -(1-\varepsilon)2ax^*_2 < 1. \end{aligned} \tag{15}$$

Подстановка x^*_1 x^*_2 приводит к соотношениям между параметрами a и ε:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1+\sqrt{1+4a}} < \varepsilon < 1 + \frac{1}{1+\sqrt{1+4a}} \qquad \text{для } x^*_1; \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4a}-1} < \varepsilon < 1 + \frac{1}{\sqrt{1+4a}-1} \qquad \text{для } x^*_2. \end{aligned} \tag{16}$$

Для $\varepsilon \in [0;1]$ и $a \in [0;2]$ результат вычисления областей (16) представлен на рис. 1. Области, обозначенные S1 и S2, соответствуют устойчивым точкам x^*_1 и x^*_2.

Цепочка связанных отображений (7) обладает в широком диапазоне параметров (a, ε) еще одним замечательным типом периодического поведения. В области значений $a \in [1,6;2,0]$ динамика всей системы проявляет так называемое зигзагообразное движение, при котором поведение всех элементов (либо большинства из них) обладает цикличностью периода 2 как по пространству так и по времени. Траектории отдельных точек при таком поведении является 2-периодическими, но соседние элементы осциллируют в противофазе.

Проанализируем подобное состояние аналитически. Период 2 в каждом элементе выражается двумя значениями x_1 и x_2. Цикличность по пространству и по времени отражают следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_2 = (1-\varepsilon)f(x_1) + \varepsilon f(x_2), \\ x_1 = (1-\varepsilon)f(x_2) + \varepsilon f(x_1), \end{cases} \tag{17}$$

где для удобства иначе переписана правая часть системы (7). Решая соотношения (17) и исключая при этом однородные состояния $x_1 = x_2$, получим:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4(1-2\varepsilon)^2 a + 4\varepsilon - 3}}{2(1-2\varepsilon)a}. \tag{18}$$

Устойчивость найденого периодического состояния можно определить из анализа собственных значений произведения матриц $\mathrm{D}F(\hat{\xi_1})\mathrm{D}F(\hat{\xi_2})$, где $\mathrm{D}F$ определяется (12), а $\hat{\xi_1} = (x_1, x_2, \ldots, x_1, x_2, \ldots)$, $\hat{\xi_2} = (x_2, x_1, \ldots, x_2, x_1, \ldots)$. Очевидно, произведение треугольных матриц $\mathrm{D}F(\hat{\xi_1})$ и $\mathrm{D}F(\hat{\xi_2})$ — треугольная матрица $\mathrm{D}F^2$. На диагонали $\mathrm{D}F^2$ расположены произведения диагональных элементов матриц $\mathrm{D}F(\hat{\xi_1})$ и $\mathrm{D}F(\hat{\xi_2})$. Поэтому собственные значения $\mathrm{D}F^2$ можно записать как

$$\lambda_i \equiv \lambda = (1-\varepsilon)^2 f'(x_1) f'(x_2) = (1-\varepsilon)^2 4a^2 x_1 x_2.$$

Отсюда, с учетом (18), найдем

$$\lambda = \frac{4(1-\varepsilon)^2}{(1-2\varepsilon)^2} - 4(1-\varepsilon)^2 a.$$

Окончательно для построения области, где наблюдается зигзагообразное поведение (x_1, x_2), необходимо учесть систему неравенств

$$\begin{cases} 4(1-2\varepsilon)^2 a + 4\varepsilon - 3 \geq 0, \\ \\ -1 < \lambda < 1, \end{cases} \tag{19}$$

отражающую условия его существования и усточивости. Вычисление с учетом дополнительных ограничений на параметры ($a \in [0;2]$ $\varepsilon \in [0;1]$) приводит к следующему соотношению:

$$\begin{cases} \dfrac{4(1-\varepsilon)^3 - (1-2\varepsilon)^2}{4(1-\varepsilon)^2(1-2\varepsilon)^2} < a < \dfrac{4(1-\varepsilon)^3 + (1-2\varepsilon)^2}{4(1-\varepsilon)^2(1-2\varepsilon)^2}, \\ \\ a \geq \dfrac{3-4\varepsilon}{4(1-2\varepsilon)^2}. \end{cases} \tag{20}$$

Результат построения области (20) показан на рис. 1, где обозначен через Z. Как следует из этого рисунка, область Z может перекрываться с областями S1 и S2 существования устойчивых точек. Это означает, что при некоторых фиксированных значениях параметров a и ε из областей пересечения предельное состояние цепочки (11) зависит от начального распределения $\{x_0^i\}_{i=1}^N$. Динамику таких цепоцек называют мультистабильной.

Во всех вычислениях стационарных и периодических состояний и их устойчивости (см. (13), (15), (17) и (19)) не учитывалось значение граничного условия $x^0 \equiv 0$. Иначе говоря, все результаты были получены в отсутствие границы, т.е. при $N \to \infty$. Однако они хорошо отражают качественную картину динамики цепочки (7) и наблюдаются при численном моделировании. Более того, в данном контексте можно сказать, что граничное условие является некоторым внешним постоянным возмущением связанных отображений, которое корректирует динамику предельного состояния.

При большой размерности N поведение системы является существенно мультистабильным. Это выражается в том, что динамика траектории сильно зависит от области, из которой было выбрано начальное условие $(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^N)$. Анализ устойчивых решений проведенный выше, никак не отражает соответствующих областей притяжения. Поэтому выход на эти состояния даже при точном вычислении (с учетом граничных условий) может быть затруднительным.

Очевидно, богатство возможных режимов поведения системы (7) отнюдь не ограничивается решениями (14) и (18). Для иллюстрации разнообразия динамики цепочки (14) с $f(x, a) = 1 - ax^2$ приведем результаты численных экспериментов данной модели на основе критерия, описанного в §2.

1. $a = 1,7$; $\varepsilon = 0,45$.

   В цепочке наблюдается временна́я периодичность и удвоение периода при передвижении от элемента к элементу слева направо. При этом однако, значения элементов x^i распределены хаотически в пространстве. Это иллюстрирует рис.2, где слева показаны значения показателя λ в зависимости от номера элемента (горизонтальная ось) и времени в масштабе τ (вертикальная ось), а справа — соответствующее значение периодов p. Чем меньше значения величин λ и p, тем темнее соответствующая точка на графике. Самым темным точкам диаграммы для λ соответствует $\lambda = 0$. Легко видеть, что значения λ для всех элементов и во все моменты времени нулевые, а значения периодов при этом удваиваются слева направо вплоть до $p = 32$. Для анализа пространственной картины на рис.2 также показаны величины x^i в некоторые последовательные моменты времени. Интуитивно ясно, что в данной цепочке наблюдается пространственный хаос. Более строго это можно подтвердить на основе анализа стационарных состояний при помощи специально построенного отображения (см. [5]). Более детальное исследование такого состояния показало, что значение максимального периода, до которого происходит удвоение, зависит лишь от a и ε, а номер элемента, после которого прекращается дальнейшее удвоение, увеличивается с ростом N.

2. $a = 1,7$; $\varepsilon = 0,11595$.

   При данных значениях степени нелинейности и силы связи авторами работы [8] было обнаружено поведение, при котором большинство элементов проявляют зигзагообразное движение, а отдельные единичные точки, равноотстоящие друг от друга, — хаотическое. При этом расстояние между хаотическими «дефектами» логарифмически зависит от величины $\varepsilon - \varepsilon_c$, где $\varepsilon_c \approx 0,11525$ — некоторое критическое значение. Описанное явление отражено на рис. 3. Хаотические дефекты выражены четкими «мигающими» линиями и расстояние между ними может быть легко посчитано.

3.2 Кольцевая цепочка квадратичных отображений

В качестве второго примера рассмотрим одномерную решетку вида (5):

$$x^i_{n+1} \longmapsto f(x^i_n, a) + \frac{1}{2}\varepsilon\Big(f(x^{i-1}_n, a) - 2f(x^i_n, a) + f(x^{i+1}_n, a)\Big), \tag{21}$$

где $f(x, a) = 1 - ax^2$. Система (21) интенсивно исследовалась ранее в работах [1-3], где было найдено, что она обладает большим разнообразием возможных режимов поведения: от синхронизации пространственных структур до полностью развитой турбулентности. Аналогично цепочке (7), динамика (21) существенно зависит от значений параметров a и ε. Рассмотрим некоторые из видов ее поведения, анализируя траектории точек путем вычисления показателей λ (см. §2) и значений периодов p в различные промежутки времени.

1. $a = 1,44$; $\varepsilon = 0,1$.

   В зависимости от начальных условий в пространстве образуются устойчивые во времени области с регулярной и нерегулярной динамикой. Не смотря на диффузионную связь между элементами, картина является устойчивой. Такое поведение системы (21) можно назвать состоянием «замороженных» структур. Типичная картина таких структур представлена на рис. 4. Из приведенного рисунка хорошо видна устойчивая картина изменения показателя λ и соответствующие ей значения периодов p.

2. $a = 1,88$; $\varepsilon = 0,3$.

   Увеличение степени нелинейности, задаваемой параметром a в отдельном отображении $f(x, a)$, ведет к разрушению всех пространственных областей синхронизации. При этом динамика всей цепочки, также как и отдельных элементов, быстро меняется как во времени так и в пространстве [1]. Это хорошо отражает параметр нерегулярности λ, поведение которого представлено на рис.5. Похожая картина видна и для распределения периодов p отдельных элементов. В качестве подтверждения на этом же рисунке показано распределение значений x^i_n в несколько последовательных моментов времени n. Обычно такое поведение цепочек связанных отображений называют пространственно-временным хаосом или, используя терминологию неравновесных сред, полностью развитой турбулентностью [1].

3. $a = 1,8$; $\varepsilon = 0,3$.

   В этом случае при случайно выбранных начальных условиях области регулярной и хаотической динамики перемежаются между собой. Подобное поведение наблюдается довольно длительное время. Однако в конечном счете почти все элементы

цепочки начинают вести себя регулярно. Анализ показывает, что цепочка стремится разделиться на ячейки размером по два элемента, в каждой из которых динамика имеет период 2. Это представлено на рис. 6, где отображено поведение системы (21) после предварительных 1 527 000 итераций.

Общий анализ систем (7) и (21), описанных выше, и некоторых других значениях параметров показывает, что разработанный метод визуализации динамики распределенной среды, аппроксимируемой решетками сцепленных отображений, является эффективным способом исследования пространственно-временной эволюции.

4 Анализ неоднородных цепочек связанных одномерных отображений

Исследование распределенных нелинейных систем показало, что наличие неоднородностей (дефектов), о которых шла речь во введении, может существенно изменить характер их динамики [9, 14]. С формальной точки зрения наличие хотя бы одного элемента с дефектом в решетке связанных отображений увеличивает количество управляющих параметров. Это приводит к тому, что возрастает размерность параметрического пространства решетки как динамической системы, что в свою очередь, в силу нелинейности закона эволюции, — к расширению множества возможных режимов поведения. Очевидно, что при такой ситуации усложняется и их исследование.

Покажем при помощи разработанного метода (см. §2), к чему может привести наличие определенных дефектов в одномерных решетках диффузионно связанных отображений.

Рассмотрим цепочку (21) с $f(x,a) = 1 - ax^2$ длиной $N = 100$, у которой все элементы (кроме центральных) имеют одно значение параметра, $a = a_1 = 1,44$, а центральные (с номерами $i = 47 - 53$) — иное, $a = a_2 = 1,97$. При $a = a_1 = 1,44$ и широком диапазоне значений ε в *однородной* цепочке (21) наблюдается регулярное поведение в виде пространственных синхронизованных структур малого размера (см. выше). В случае $a = a_2 = 1,97$ однородная система (21) проявляет все свойства пространственно-временного хаоса. Таким образом, условно говоря, дефект состоит в том, что в цепочку с регулярным поведением вкраплены несколько "хаотических" элементов. Анализ 5000 итераций такой цепочки после предварительных 10^5 представлен на рис.7. Видно, что центральные элементы синхронизованы с периодом 2, а хаос перемещается на другие элементы. Однако, если провести $5 \cdot 10^6$ предварительных итераций, то хаос будет локализован в элементах с $a_2 = 1,97$ и некоторых соседних элементах справа и слева. Это говорит о том, хаотическое поведение благодаря диффузии распространяется на элементы с регулярным поведением.

Рассмотрим теперь другой случай неоднородной цепочки (21). Напомним, что система (21) при значении параметра $a = 1,8$ и небольших значениях диффузии ε, проявляет перемежаемость синхронизации и нерегулярного поведения как по пространству так и по времени (см §3.2). Построим цепочку вида (21) для $N = 100$ так, чтобы 50 элементов имели одно значение нелинейности ($a = a_1 = 1,8$), а остальные 50 — $a = a_2 = 1,97$:

$$\begin{cases} x^i_{n+1} = f(x^i_n, a_1) + \dfrac{\varepsilon}{2}\Big(f(x^{i-1}_n, a_1) - 2f(x^i_n, a_1) + f(x^{i+1}_n, a_1)\Big), & n\text{-нечетное}, \\ x^i_{n+1} = f(x^i_n, a_2) + \dfrac{\varepsilon}{2}\Big(f(x^{i-1}_n, a_2) - 2f(x^i_n, a_2) + f(x^{i+1}_n, a_2)\Big), & n\text{-четное}. \end{cases} \tag{22}$$

Таким образом, в системе (22) элементы с различными a чередуются в пространстве. Значение параметра диффузии ε положим равным 0,7. На относительно небольших временах $T \approx 10^4$ такая неоднородная система проявляет пространственно-временной хаос, аналогичный однородной цепочке при $a = 1,97$. Однако если ассимптотически проанализировать динамику (скажем, провести $5 \cdot 10^7$ итераций), то можно обнаружить неожиданное явление: вся цепочка синхронизируется. Это выражается в том, что в пространстве значений параметра λ наблюдается регулярная картина (рис.8). Из этого рисунка следует, что всплески нерегулярности возникают строго через равные промежутки времени и на одинаковом расстоянии друг от друга. Здесь можно говорить о том, что со временем хаос как бы перемещается по цепочке с постоянной скоростью. На рис.8 видны также небольшие загнутые ответвления от прямых линий. Это означает, что хаотические всплески движутся не равномерно, а с небольшим ускорением. Однако через некоторое время они исчезают. Если подробно исследовать это явление, то можно обнаружить, что скорость перемещения хаотических дефектов существенно зависит от значений a_1 и a_2, а также от диффузии ε, но не зависит от распределения начальных условий. От начальных условий зависит только их направление движения.

В заключение исследуем неоднородную кольцевую цепочку (21) с одним единственным дефектом. Пусть все элементы цепочки имеют общую степень нелинейности ($a = a_1 = 1,8$), а центральный — $a = a_2 = 1,99$. Выберем коэффициент диффузии $\varepsilon = 0,1$. Сначала уделим небольшое внимание системе (21) без дефекта. Типичная картина динамики показана на рис. 9. В течение всей эволюции большинство элементов синхронизованы, но при этом существуют мелкие «хаотические» структуры, которые блуждают по пространству. Как хорошо видно на рис. 9, встречаясь, они взаимно уничтожаются. Соответственно и рождаются они парами. Подобное поведение в работе [1, 2] сравнивалось с аналогом броуновского движения.

Теперь добавим дефект с $a = a_2 = 1,97$ в центре. Исследования показывают, что наличие элемента с большей степенью нелинейности приводит к похожей картине, за исключением того, что в центральном элементе всегда существует расстройка синхронизации, а количество блуждающих структур увеличивается. Их динамика полностью

повторяет динамику структур в однородной системе с тем лишь отличием, что они могут также исчезать, встречаясь с центром ($i = 50$), и рождаться на нем. Условно говоря, элемент с дефектом является зародышем—поглотителем "броуновских"частиц. В связи с этим интересно выяснить состояние такой системы на больших временах. Оказывается, что независимо от начальных условий, предельное состояние является симметричным.

На рис.10 представлена подобная картина через $5 \cdot 10^7$ итераций, где для удобства дефект с $a_2 = 1,97$ перемещен в элемент с $i = 75$. Видно, что «хаотические частицы» рождаются парами на дефекте и движутся по симметричным относительного него траекториям. Они также исчезают путем столкновения друг с другом и с элементом с дефектом. Отметим, что хаотические элементы являются причиной небольшой расстройки синхронизации во всех элементах. На рис. 10 видно, что эта расстройка распространяется по пространству в разные стороны и сходится прямо противоположно (на кольце) относительно дефекта.

Приведенные примеры показывают, что неоднородные решетки отображений обладают абсолютно непредсказуемым богатством возможных режимов движения, которое может быть эффективно продемонстрировано с использованием предложенного в §2 показателя.

5 Заключение

Распределенные среды достаточно хорошо могут моделироваться дискретными по пространству и времени системами или решетками сцепленных отображений. Но для решеток связанных отображений знание величин, определяющих их глобальное поведение на асимптотически больших временах не представляет большого интереса. Более важно найти характеристики, определяющие локальные свойства таких систем и их эволюцию во времени.

В данной работе развивается новый метод анализа цепочек связанных отображений, позволяющей визуализовать поведение отдельных элементов и динамику всей системы в целом. С его помощью исследовано поведение как однородных систем диффузионно сцепленных одномерных квадратичных отображений, так и с пространственной неоднородностью. При этом рассмотрены различные типы неоднородностей: периодическая по всему пространству, неоднородность в виде дефекта в нескольких подряд взятых элементах и дефект в одном единственном элементе. Показано, что присутствие в модели различного вида неоднородностей может существенно изменить поведение всей системы. В частности, при определенных значениях параметров и коэффициентов диффузии динамика неоднородной цепочки с чередующимися дефектами синхронизируется

при любых начальных условиях. Особенность такой цепочки состоит в том, что однородные системы со значениями параметров, задающих неоднородности, проявляют пространственно-временной хаос. Можно сказать, что синхронизация сложного поведения происходит путем внесения пространственно периодической неоднородности.

В заключение следует отметить, что представленные результаты являются достаточно новыми. Анализ динамики *неоднородных* систем сцепленных отображений весьма сложен, и рассмотрение даже однородных дискретных моделей как правило наталкивается на значительные трудности. Тем не менее, предложенный критерий локального анализа позволяет упростить исследование и *наглядно* отображать поведение решеток в целом.

6 Литература

[1] *K.Kaneko.* Physica D. 1989. V.34, P.1-41.

[2] *K.Kaneko.* Physica D. 1989. V.37. P.60-82.

[3] *L.A.Bunimovich, Ya.G.Sinai.* Statistical Mechanics of coupled map lattices. In: Theory and Applications of Coupled Map Lattices. Ed. K.Kaneko. San-Francisco: Wiley and Sons, 1993. P.169-189.

[4] *Chaos.* Focus Issue on Coupled Map Lattices. 1992. V.2. No3.

[5] *K.Kaneko, F.Willeboords.* Bifurcation and Spatial Chaos in Open Flow Model. http://xxx.lanl.gov/abs/chao-dyn/9312007. 1993.

[6] *S.Aubry.* In: Solitons and Condensed Matter Physics. Ed. R.Bishop and T.Schneider. Springer. 1979.

[7] *K.Otsuka, K.Ikeda.* Phys. Rev. Lett. 1987. V.119A. P.397.

[8] *K.Kaneko, F.Willeboords.* Self-Organized Periodic Lattices of Chaotic Defects. http://xxx.lanl.gov/abs
dyn/9405007. 1994.

[9] *К.А.Васильев, А.Ю.Лоскутов, С.Д.Рыбалко, Д.Н.Удин.* Теор. и матем. физика. 2000. Т.124. No3. стр.506-519.

[10] *M.Jiang, Ya.B.Pesin.* Commun. Math. Phys. 1998. V.193. P.677-711

[11] *G. Gielis, R.S. MacKay.* Preprint. Cambridge. UK 1999

[12] *S.Morita.* Phys. Lett. A. 1997. V.226. P.172-178.

[13] *A.P.Muñuzuri, V.Perez-Muñuzuri, M.Gomez-Gesteira, L.O.Chua, V.Perez-Villar.* Int. J. Bif. and Chaos. 1995. V.5. P.17-50.

[14] *А.Ю.Лоскутов, Г.Э.Томас.* Вестн. Моск. ун-та, сер. Физ.-астр. 1993. Т.34. No5. С.3-11.

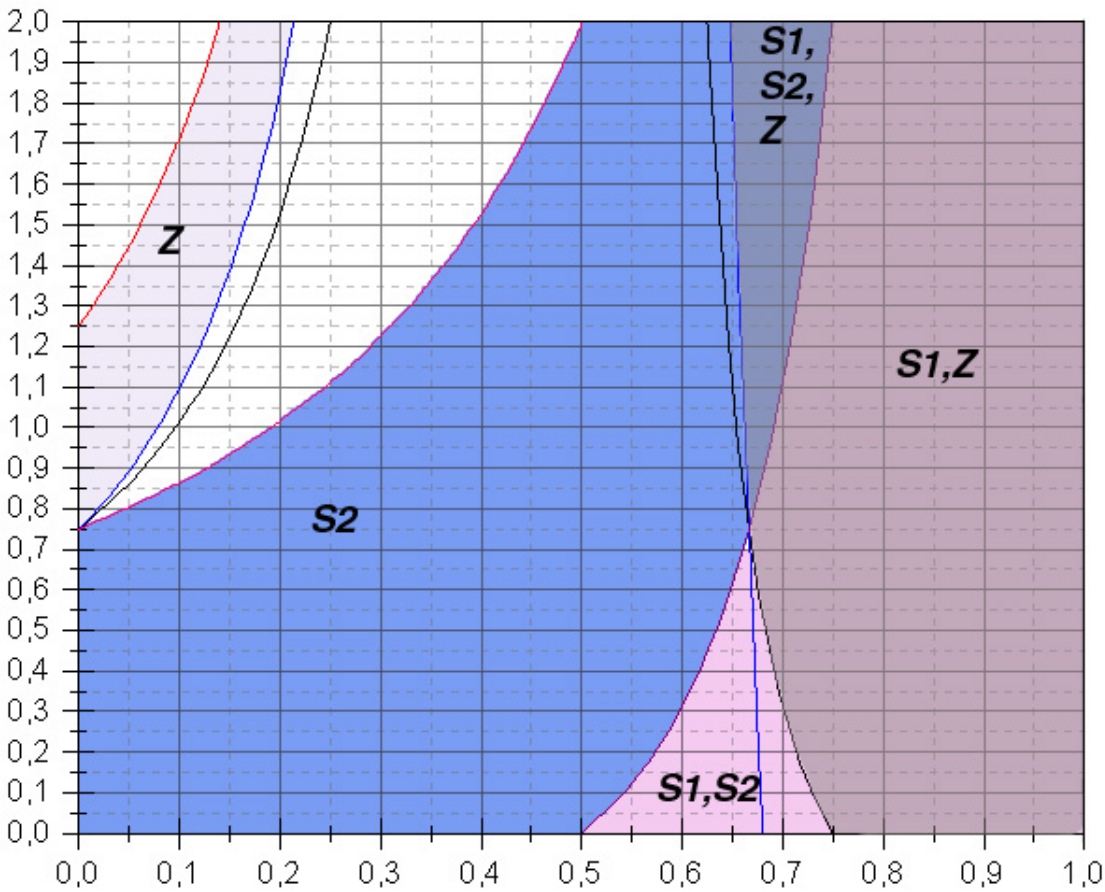


Рис. 1: Области существования и устойчивости стационарных состояний x_1^* и x_2^* и зигзагообразного поведения цепочки (7). S1, S2 — области существования устойчивых точек x_1^* и x_2^* соответственно. Z — область существования устойчивых зигзагообразных решений (18).

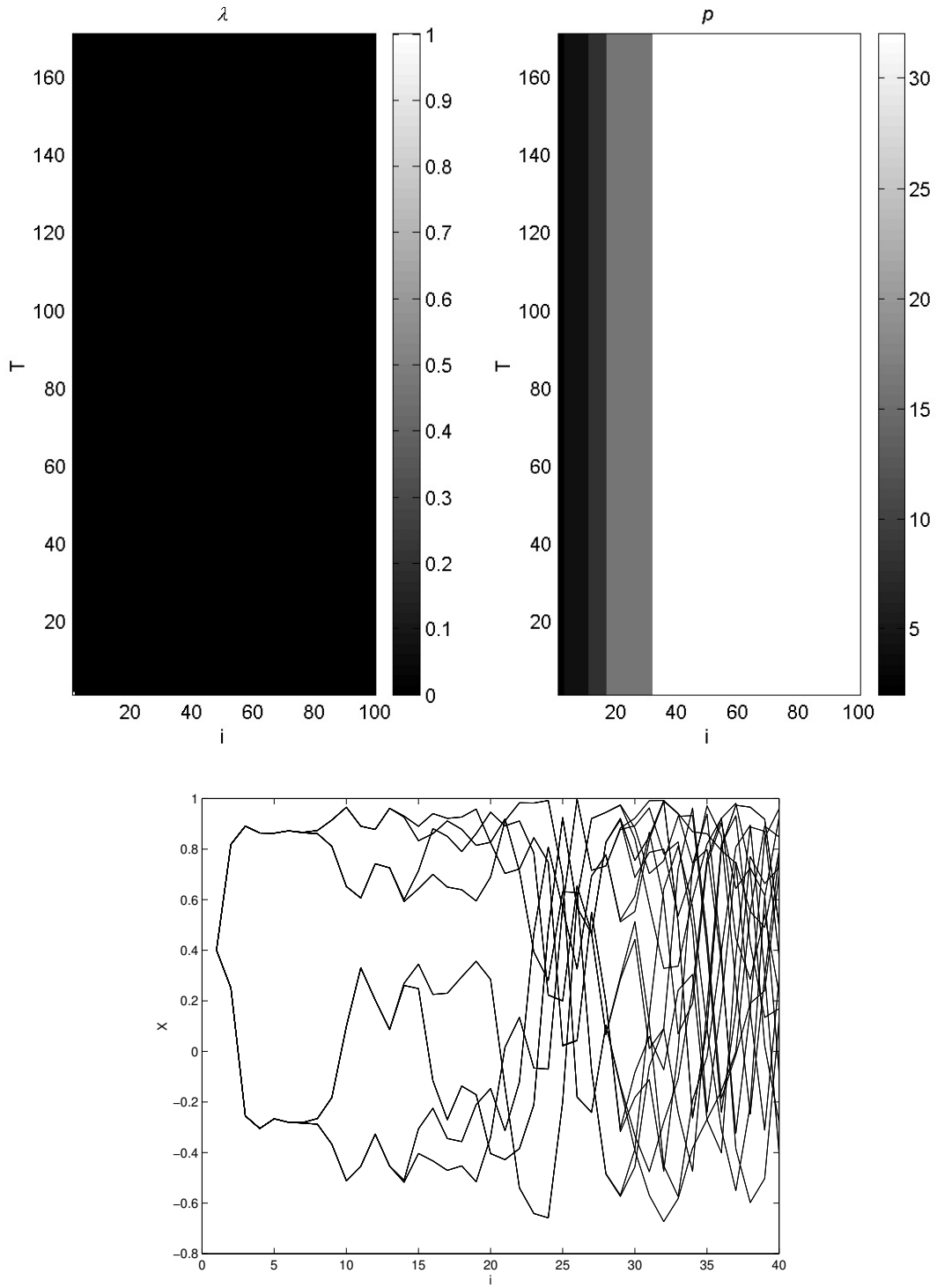


Рис. 2: Динамика системы (11) при значениях параметров $a = 1,7$ и $\varepsilon = 0,45$. Слева показаны значения показателя λ в зависимости от номера элемента (горизонтальная ось) и времени в масштабе τ (вертикальная ось), а справа — соответствующее значение периодов p. Внизу отображено распределение величин x^i в некоторые последовательные моменты времени.

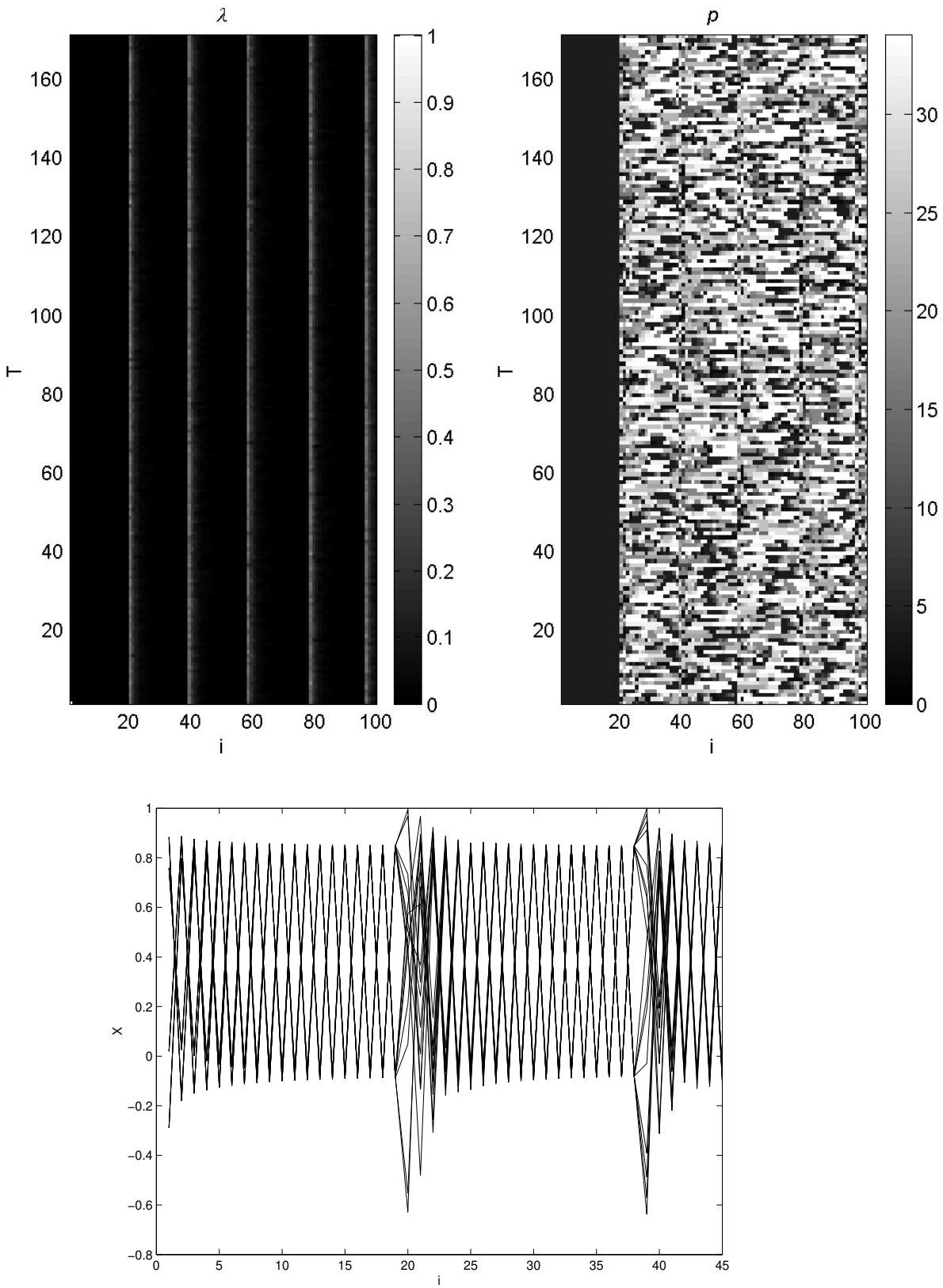


Рис. 3: Тоже что и на рис. 2 при $a = 1,7$ и $\varepsilon = 0,11595$.

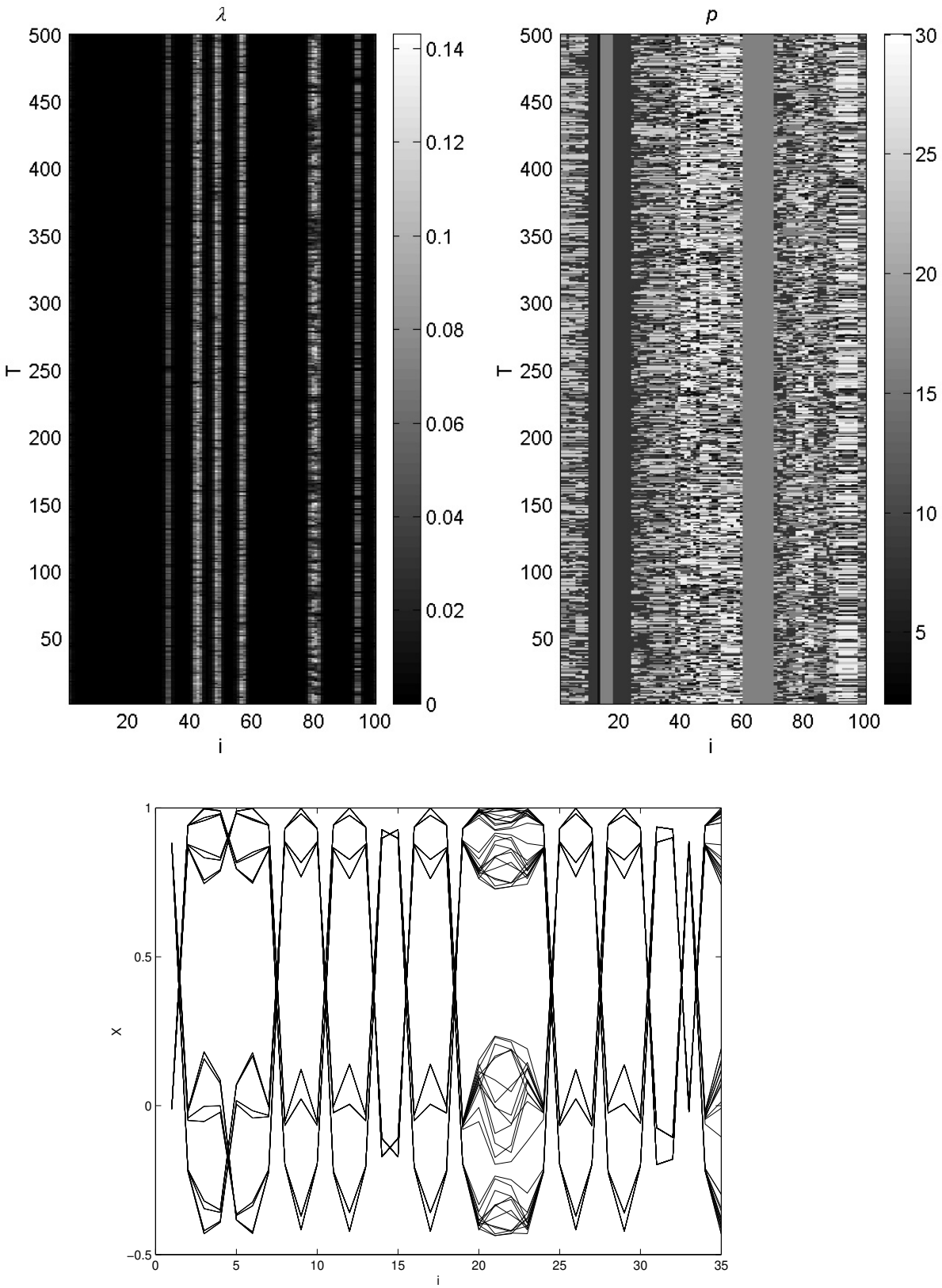
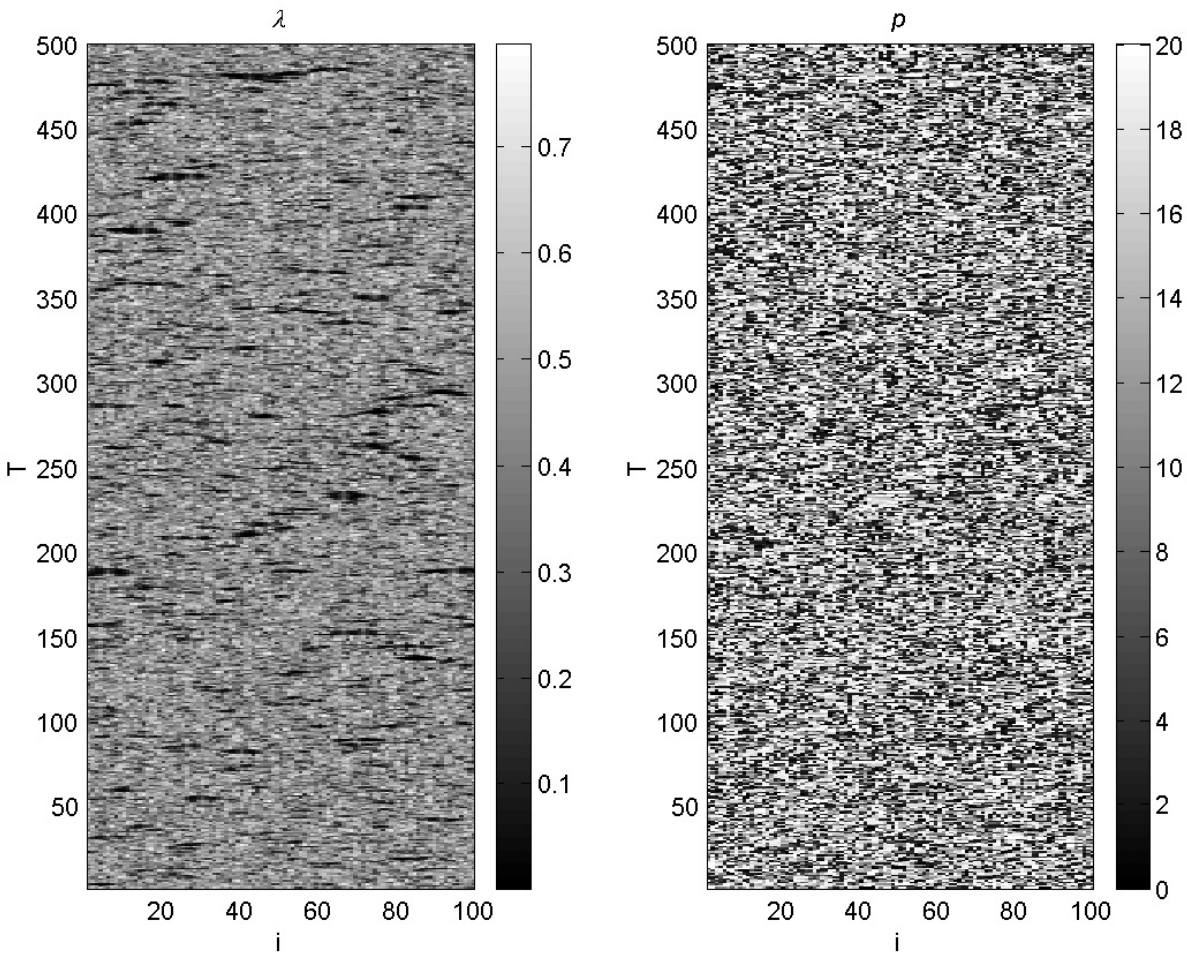


Рис. 4: Динамика кольцевой цепочки (21) при $a = 1,44$ и $\varepsilon = 0,1$.



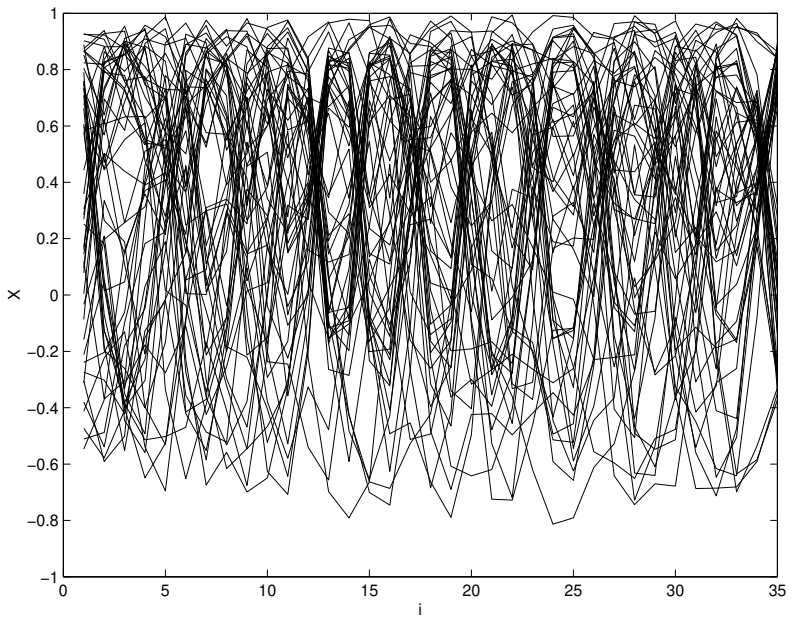


Рис. 5: Тоже что и на рис. 4 при $a = 1,88$ и $\varepsilon = 0,3$.

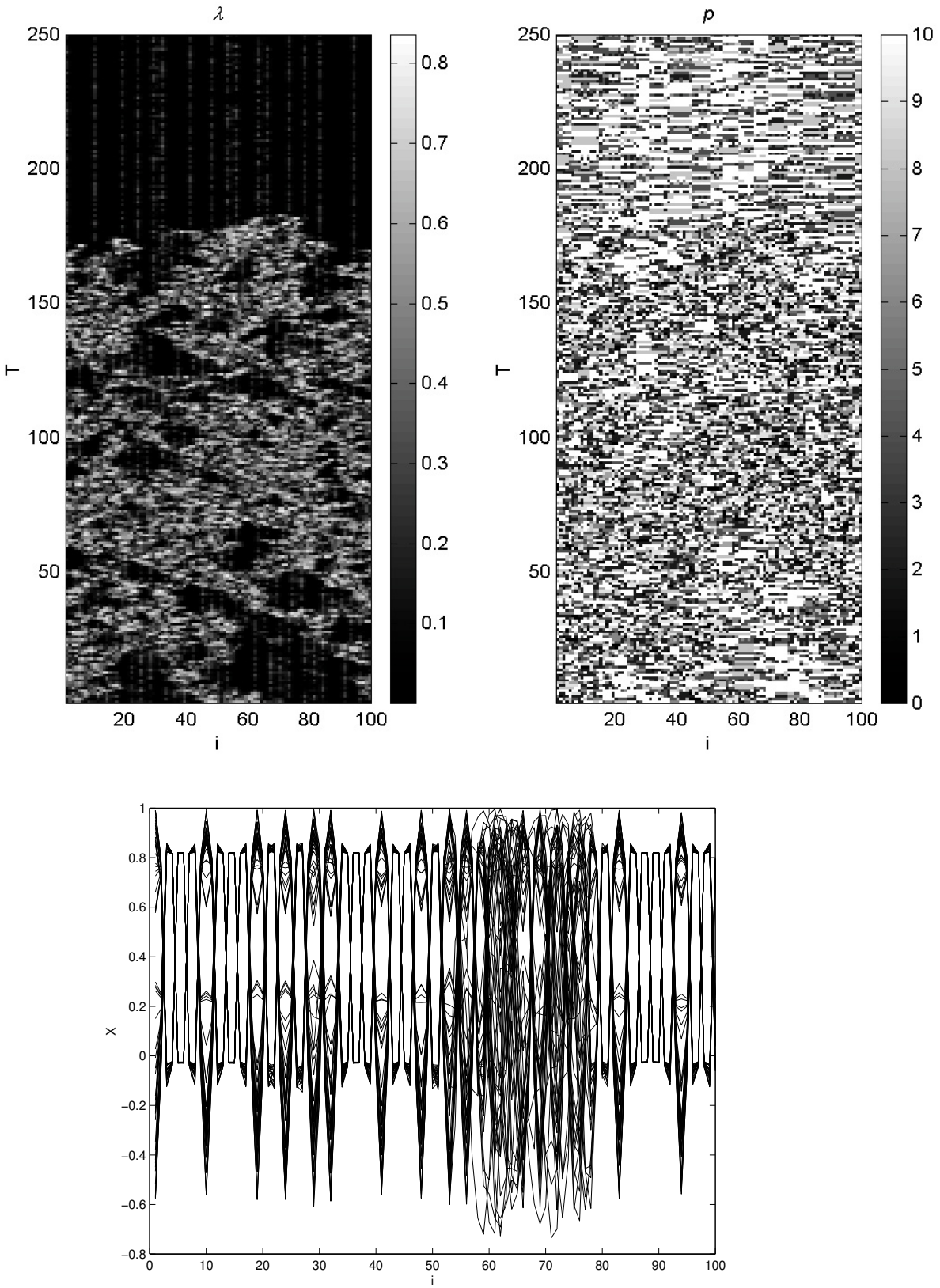


Рис. 6: Тоже что и на рис. 4 при $a = 1,8$ и $\varepsilon = 0,3$.

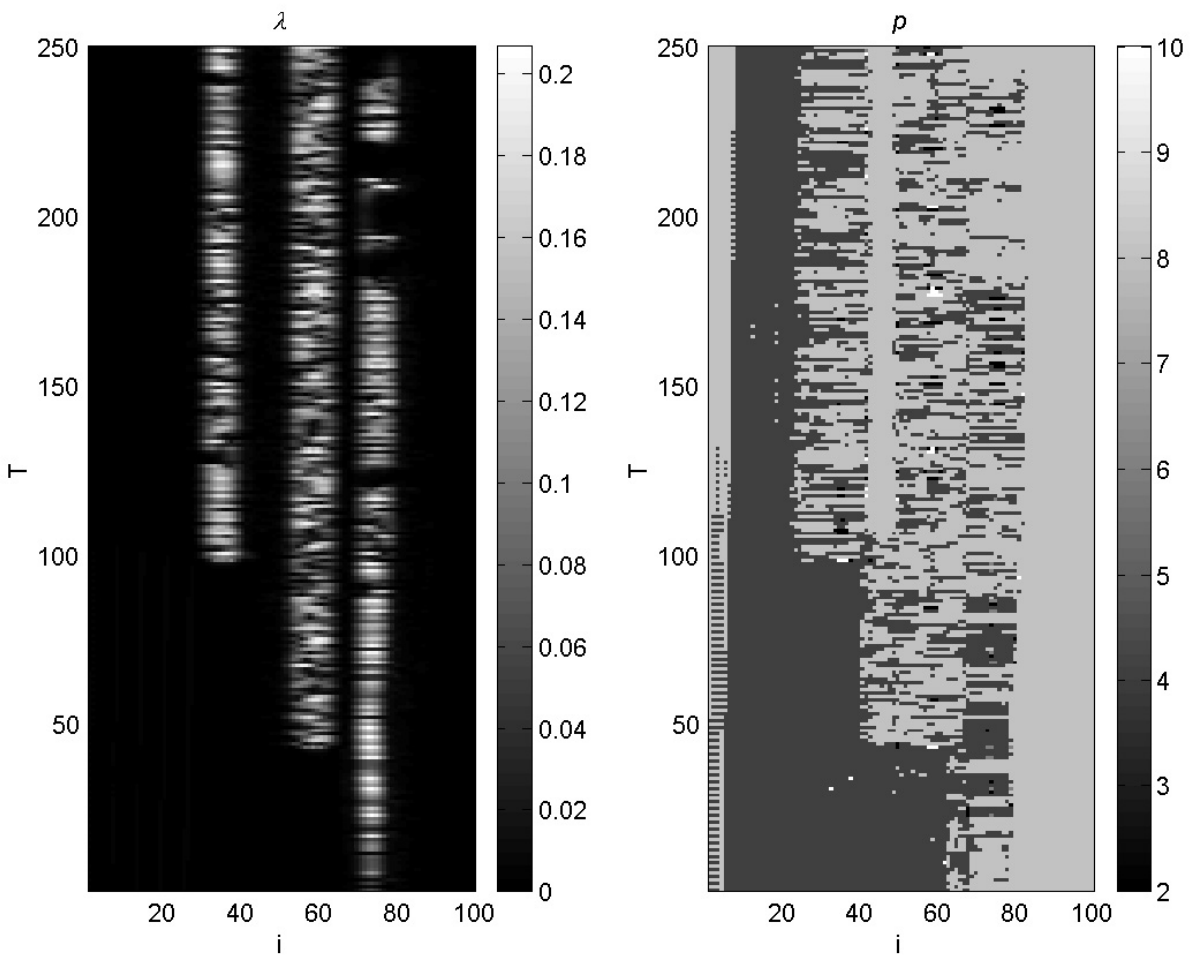


Рис. 7: Динамика цепочки (21), у которой все элементы (кроме центральных) имеют одно значение параметра, $a = a_1 = 1,44$, а центральные (с номерами $i = 47-53$) — иное, $a = a_2 = 1,97$ (после предварительных 10^5 итераций). Значение диффузии $\varepsilon = 0,7$.

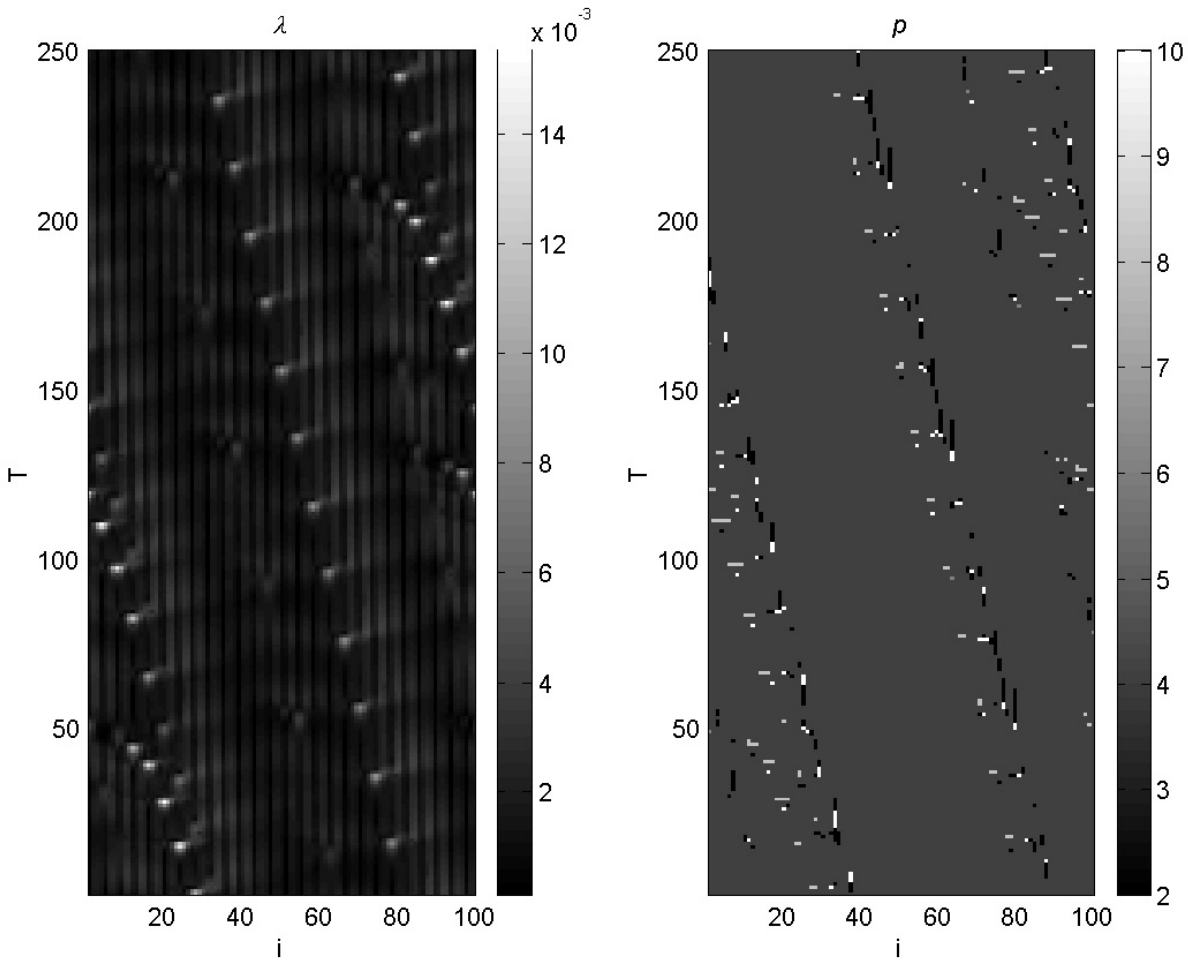


Рис. 8: Поведение системы (22) с чередованием параметра нелинейности в элементах после предварительных $5 \cdot 10^7$ итераций. $a_1 = 1,8,\ a_2 = 1,97$ и $\varepsilon = 0,7$.

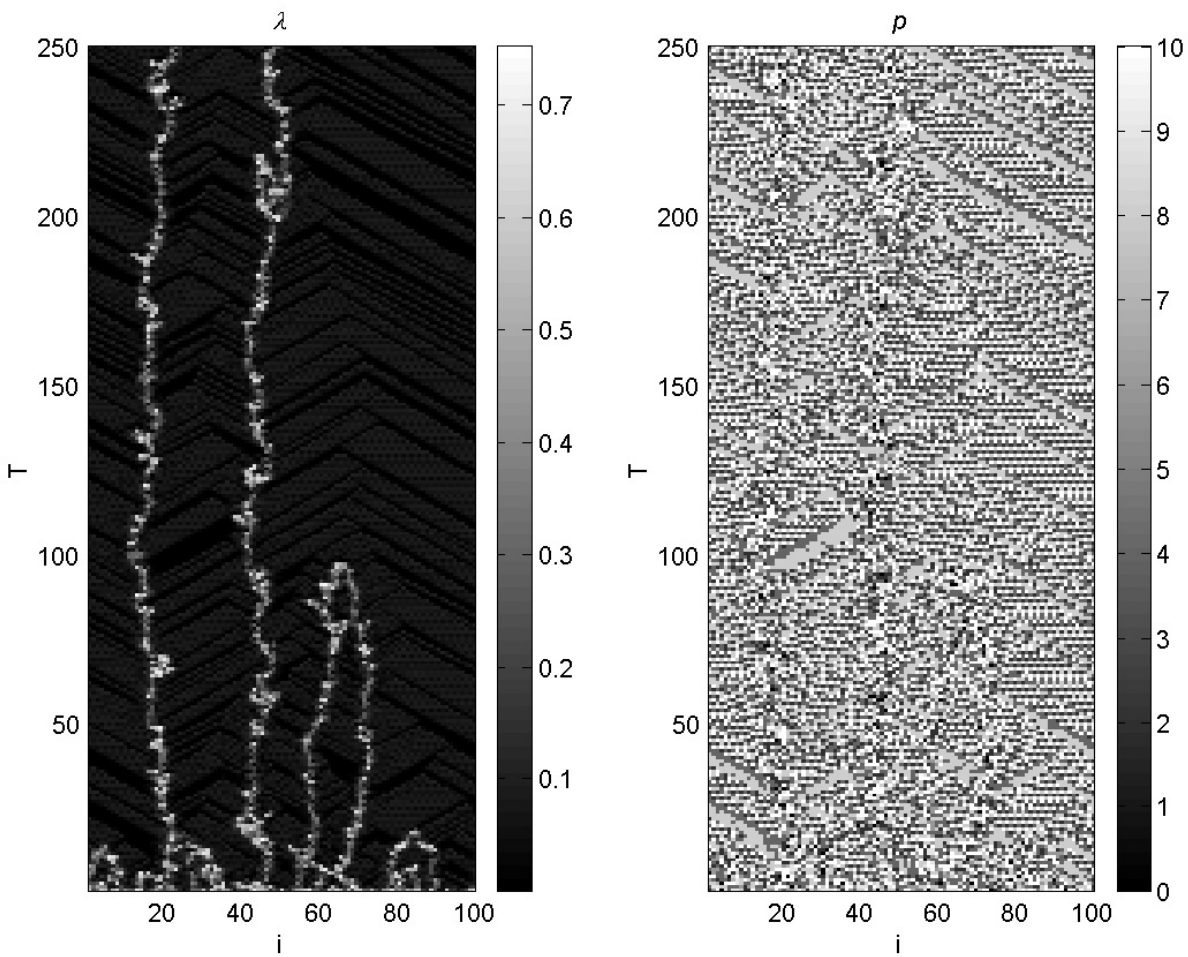


Рис. 9: Динамика кольцевой цепочки (21) при значениях параметров $a = a_1 = 1,8$ и $\varepsilon = 0,1$.

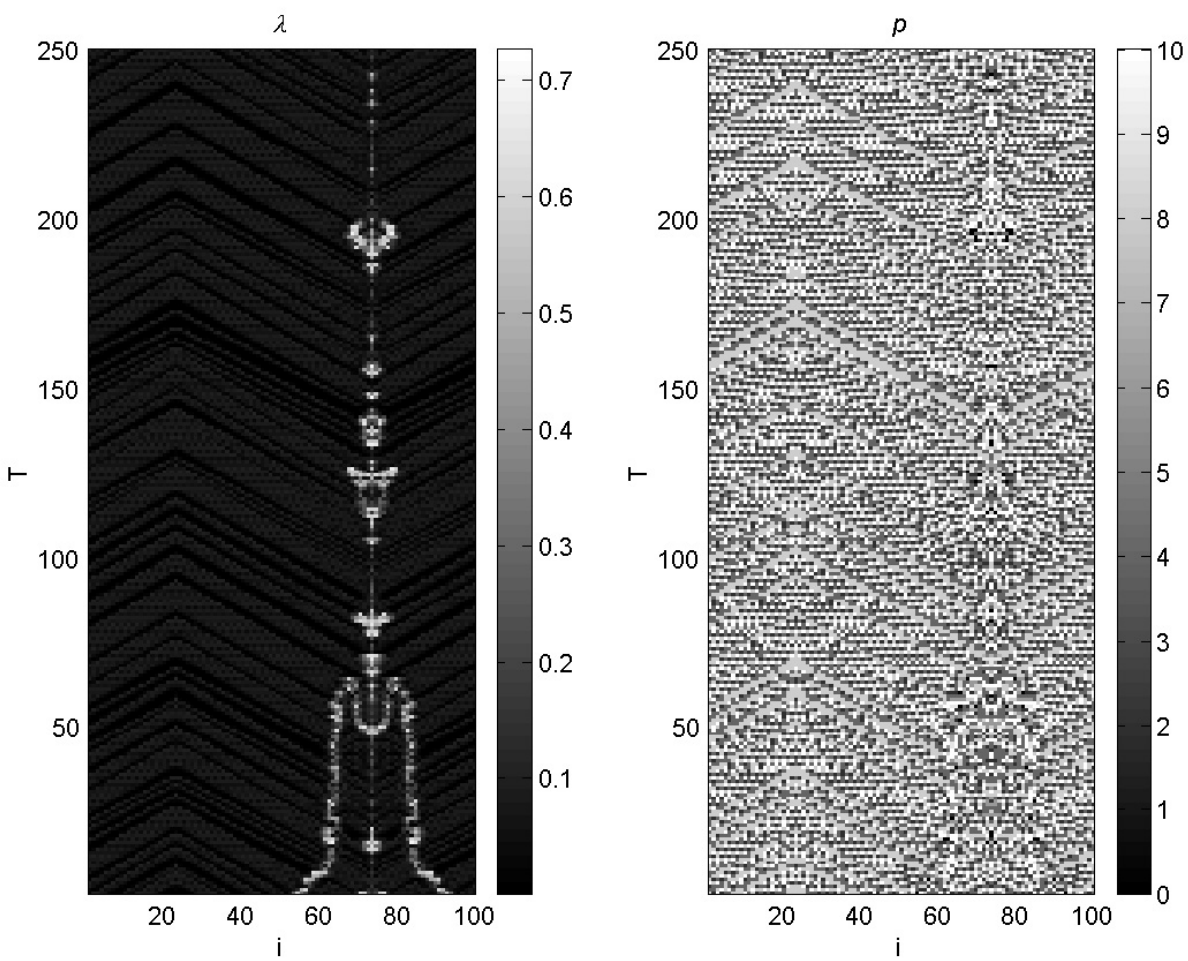


Рис. 10: Тоже что и на рис. 9 при наличии дефекта с $a_2 = 1,99$ в одном единственном элементе ($i = 75$). $\varepsilon = 0,1$. Проведено $5 \cdot 10^7$ предварительных итераций.