

Глава 1 из учебника
АЮ.Лоскутова и А.С.Михайлова
"Основы теории сложных систем", РХД, 2007г.

ВОЛНЫ И СТРУКТУРЫ В АКТИВНЫХ СРЕДАХ

Активные среды характеризуются непрерывным рассредоточенным притоком энергии от внешнего источника и ее диссипацией. Благодаря тому, что через каждый физически малый элемент среды протекает поток энергии от источника к термостату, этот элемент выводится из состояния теплового равновесия и приобретает способность совершать автоколебания, быть триггерным (бистабильным) либо возбудимым. Когда отдельные такие элементы локально связаны между собой и формируют распределенную активную среду, в подобной среде наблюдается образование различных стационарных или зависящих от времени пространственных структур. Эти процессы лежат в основе явлений самоорганизации в активных средах.

1. Основные типы активных сред

Как уже отмечалось во Введении, в изучении кооперативного поведения сложных систем важную роль играют типовые, или *базовые*, модели. Каждая такая модель «сама по себе» не соответствует какой-то конкретной системе; она строится исходя из чрезвычайно упрощенных представлений о свойствах отдельных элементов и процессов взаимодействия между ними.

Изучение кооперативного поведения — это важная составная часть физики конденсированных систем, занятой исследованием жидкостей, кристаллов, стекол и т. п. Однако рассматриваемые при этом системы обладают спецификой, не свойственной биологическим или сложным химическим системам. Обычно элементы, из которых состоит физическая система, являются пассивными — для каждого из них, как и для системы в целом,

существует выделенное равновесное состояние с минимумом энергии. Достигнув этого состояния, система уже не способна самостоятельно его покинуть.

Для биологии типична иная ситуация. Здесь отдельные элементы — живые клетки или макроорганизмы — являются активными. Их поведение не может быть представлено как эволюция в сторону какого-то выделенного устойчивого состояния абсолютного покоя. Разумеется, сохранение активности образующих систему элементов возможно лишь благодаря притоку к ним энергии от внешних источников. Если такой приток энергии имеет место, активными могут стать и довольно простые физические системы.

Можно выделить три простейших типа активных элементов: *бистабильные, возбудимые и автоколебательные*.

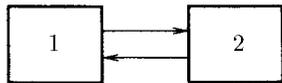


Рис. 1.1. Схема переходов в бистабильном элементе

Бистабильный (или триггерный) элемент обладает двумя стационарными состояниями (1 и 2), в каждом из которых он может находиться неограниченно долго (рис. 1.1). Внешние воздействия могут приводить к переходам из одного состояния в другое. Чтобы вызвать переход, интенсивность воздействия должна превысить некоторый пороговый уровень.

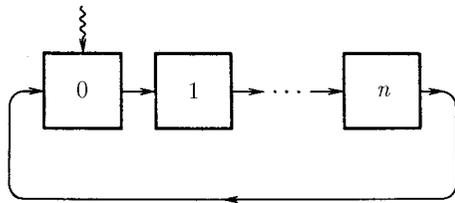


Рис. 1.2. Схема переходов в возбудимом элементе

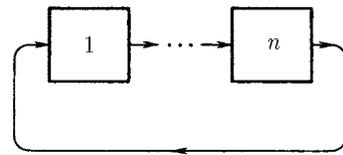


Рис. 1.3. Схема переходов в автоколебательном элементе

Возбудимый (или мультивибраторный) элемент имеет единственное выделенное состояние покоя, устойчивое по отношению к достаточно слабым внешним воздействиям. Однако такой элемент отличается от пассивного по своей реакции на воздействия, превышающие пороговый уровень. В ответ на такое достаточно интенсивное внешнее воздействие в элементе возникает вспышка активности: он совершает определенную последо-

вательность активных переходов и лишь затем возвращается к исходному состоянию покоя (рис. 1.2).

Автоколебательный элемент работает подобно «вечному двигателю». Он автономно совершает циклические переходы через некоторую группу состояний (рис. 1.3). Внешние воздействия способны лишь замедлить или ускорить это циклическое движение, но не приостановить его.

Рассмотрим вначале цепочку из бистабильных элементов. Естественно предположить, что в ней воздействие друг на друга оказывают лишь соседние элементы. В простейшем случае элементы, находящиеся в одинаковых состояниях, не влияют друг на друга. Если же состояния двух соседних элементов различны, они взаимодействуют. Элемент, находящийся в менее устойчивом (метастабильном) стационарном состоянии, переходит в более устойчивое состояние — такое же, что и у его соседа. Нетрудно убедиться, что в результате по цепочке бистабильных элементов распространяется *волна переключения* из метастабильного в абсолютно устойчивое состояние (рис. 1.4).

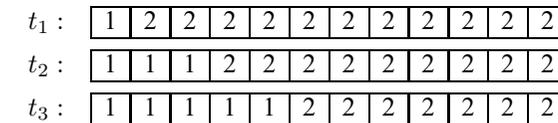


Рис. 1.4. Схема распространения волны переключения в цепочке из бистабильных элементов. Показаны состояния элементов цепочки в последовательные моменты времени t_1 , t_2 и t_3

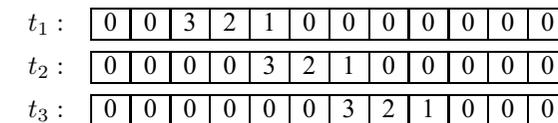


Рис. 1.5. Схема распространения волны возбуждения в цепочке из возбудимых элементов. Показаны состояния элементов цепочки в последовательные моменты времени t_1 , t_2 и t_3

Пусть цепочка состоит из возбудимых элементов. Каким может быть взаимодействие между этими элементами? Естественно считать, что элемент, перешедший из состояния покоя в активную форму, остается невосприимчивым к внешним воздействиям, пока он не совершит всю предписанную ему последовательность переходов. Поэтому достаточно рассмот-

t_1 :	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1
t_2 :	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
t_3 :	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3

Рис. 1.6. Схема распространения фазовой волны в цепочке из автоколебательных элементов. Показаны состояния элементов цепочки в последовательные моменты времени t_1 , t_2 и t_3

реть лишь случаи, когда по соседству оказались два элемента, из которых один находится в активной форме, а другой — в состоянии покоя. Можно представить себе два вида их взаимодействия. Во-первых, всякий элемент в активной форме мог бы выводить из состояния покоя оказавшийся рядом с ним элемент. Легко проверить, что в этом случае в ответ на однократное воздействие в цепочке возникнет незатухающая волновая активность. Более интересна ситуация, когда выводить из состояния покоя могут лишь элементы, находящиеся в первых фазах вспышки активности. Тогда в результате возбуждения крайнего элемента в цепочке по ней будет распространяться уединенный импульс активности (*волна возбуждения*), после прохождения которого элементы возвращаются в исходное состояние покоя (рис. 1.5).

Наконец, если составить цепочку из автоколебательных элементов, в ней могут наблюдаться *фазовые волны* (рис. 1.6). Для этого достаточно создать сдвиг по начальным фазам колебаний вдоль цепочки. Всем известный пример фазовых волн — это волны в гирляндах электрических лампочек: каждая из них загорается и гаснет через один и тот же промежуток времени, но моменты загорания сдвинуты для соседних лампочек. Взаимодействие между автоколебательными элементами может привести к появлению зависимости частоты фазовых волн от их пространственного периода либо даже обеспечивать синхронизацию, т. е. обеспечивать установление единой фазы колебаний.

Еще более сложные эффекты наблюдаются в двумерных или трехмерных сетях, образованных бистабильными, возбудимыми или автоколебательными элементами. Мы обсудим эти эффекты позднее.

До настоящего момента мы рассматривали активные элементы фактически в качестве определенных *автоматов*, т. е. объектов с дискретным набором состояний и некоторыми правилами переходов между ними. Более детальный уровень описания основывается на построении дифференциальных уравнений, характеризующих динамику отдельных элементов и их взаимодействия. Заметим, наконец, что активная среда может являться также распределенной, а не состоять из дискретных связанных между собой яче-

ек. В этом случае свойства бистабильности, возбудимости или способности к совершению незатухающих автоколебаний относятся к малым, условно выделенным элементам такой распределенной среды.

2. Волны переключения и заселения в простых бистабильных средах

Простейший бистабильный элемент описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{u} = f(u), \quad (1.1)$$

в котором нелинейная функция $f(u)$ имеет характерный вид, изображенный на рис. 1.7. Очевидно, что всякое значение u^* , для которого $f(u^*) = 0$, отвечает стационарному состоянию такого элемента. Поведение малых отклонений $\delta u = u - u^*$ при этом подчиняется линеаризованному уравнению

$$\delta \dot{u} = f'(u^*) \delta u. \quad (1.2)$$

Следовательно, значение $u = u^*$ отвечает устойчивому (по отношению к малым возмущениям) стационарному состоянию элемента, лишь если производная $f'(u)$ в этой точке отрицательна. Поэтому для функции $f(u)$, изображенной на рис. 1.7, значения $u = u_1$ и $u = u_3$ соответствуют устойчивым состояниям, тогда как стационарное состояние со значением $u = u_2$ абсолютно неустойчиво.

Приведем несколько примеров различных систем, поведение которых действительно характеризуется уравнениями вида (1.1) с двумя устойчивыми состояниями.

1. Пусть элемент представляет собой ячейку, внутри которой может протекать процесс горения. При этом будем считать, что имеющийся запас горючей смеси в этой ячейке поддерживается постоянным за счет непрерывного притока от внешнего источника либо он настолько велик, что его расходом в ходе реакции можно пренебречь. Предположим, что при горении в единицу времени выделяется количество теплоты $q(\Theta)$, которое зависит, вообще говоря, от температуры Θ , при которой происходит горение. Ясно, что зависимость имеет ступенчатый характер (рис. 1.8): при температурах ниже некоторой критической Θ_c горение отсутствует и теплота не выделяется.

Если элемент изолирован от внешней среды, то вся выделяющаяся при горении теплота расходуется на его нагрев, т. е.

$$q(\Theta)\Delta t = C\Delta\Theta, \quad (1.3)$$

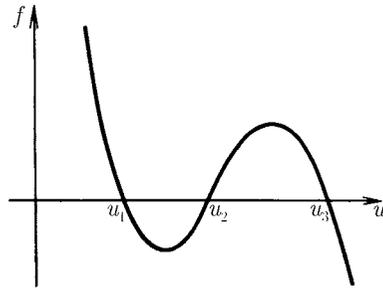


Рис. 1.7. Типичный вид функции $f(u)$

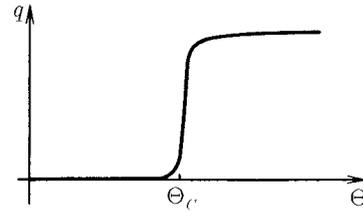


Рис. 1.8. Зависимость количества теплоты q , выделяющейся в единицу времени при горении, от температуры Θ

где $\Delta\Theta$ — приращения температуры за время Δt , а C — теплоемкость элемента. Поэтому изменение температуры со временем подчиняется уравнению

$$\dot{\Theta} = C^{-1}q(\Theta). \quad (1.4)$$

Поскольку функция $q(\Theta)$ неотрицательна, то согласно (1.4) температура элемента неограниченно возрастает с течением времени. В действительности, конечно, имеет место теплообмен между элементом и окружающей средой. Если температура окружающей среды есть Θ_1 , а коэффициент, характеризующий скорость теплообмена, равен γ , то модифицированное уравнение, учитывающее эффект теплообмена, имеет вид

$$\dot{\Theta} = C^{-1}q(\Theta) - \gamma(\Theta - \Theta_1). \quad (1.5)$$

Обозначив правую часть этого уравнения как

$$f(\Theta) = C^{-1}q(\Theta) - \gamma(\Theta - \Theta_1),$$

приходим к (1.1).

В данном случае устойчивые по отношению к малым возмущениям стационарные состояния имеют особенно простую интерпретацию (рис. 1.9а): состояние $\Theta = \Theta_1$ отвечает отсутствию горения, так что температура элемента совпадает с температурой окружающей среды, а состояние с $\Theta = \Theta_1$ соответствует установившемуся стационарному режиму, когда выделяющаяся при горении теплота полностью отводится в окружающую среду. Оба

состояния устойчивы по отношению к малым возмущениям, однако воздействия достаточно большой интенсивности могут приводить к переходам между двумя состояниями — элемент можно «зажечь» или «погасить».

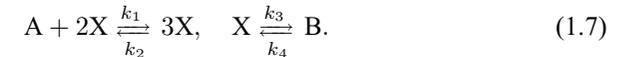
Кстати, тот же элемент при других соотношениях параметров может обладать всего одним устойчивым стационарным состоянием. Например, если тепловыделение слишком мало либо теплоотвод слишком велик, режим устойчивого самоподдерживающегося горения отсутствует (рис. 1.9б) и единственное стационарное состояние — это состояние с температурой $\Theta = \Theta_1$. Если температура окружающей среды Θ_1 превышает критическую температуру загорания Θ_c , элемент является самовоспламеняющимся (рис. 1.9в). Тогда единственное стационарное состояние отвечает самоподдерживающемуся режиму горения.

Заметим, наконец, что если взять цепочку из связанных между собой подобных элементов, то (в приближении непрерывной среды) она описывается уравнением

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = f(\Theta) + \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad (1.6)$$

где χ — температуропроводность.

2. Рассмотрим гипотетическую схему химических реакций (модель Шлёгеля)



Пусть концентрации химических веществ A и B заданы и поддерживаются постоянными. Тогда кинетическое уравнение для изменения со временем концентрации X вещества X записывается как

$$\dot{X} = k_1 A X^2 - k_2 X^3 - k_3 X + k_4 B. \quad (1.8)$$

Таким образом, стоящая в правой части этого уравнения функция $f(X)$ является кубическим полиномом. В определенном интервале значений параметров k_1, k_2, k_3, k_4, A и B эта функция имеет вид, показанный на рис. 1.7, а следовательно, такая необратимая химическая реакция обладает двумя устойчивыми стационарными режимами, которые характеризуются разными значениями концентрации $X = X_1$ и $X = X_3$.

Кинетическое уравнение (1.8) записано в предположении, что внутри элемента происходит полное диффузионное перемешивание реагирующих веществ. Если взять цепочку из таких элементов, то между ними будет происходить обмен молекулами за счет диффузии. В континуальном приближении (т. е. для распределенной среды) распределение концентрации

вещества X вдоль цепочки меняется тогда с течением времени согласно уравнению

$$\frac{\partial X}{\partial t} = f(X) + D \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}. \quad (1.9)$$

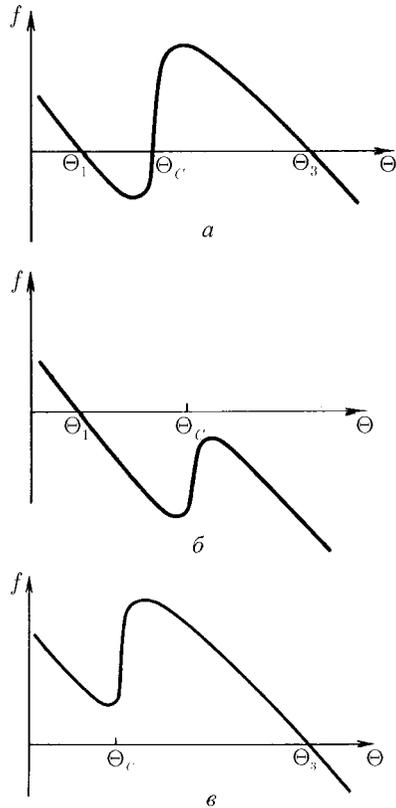


Рис. 1.9. Три возможные ситуации для ячейки, содержащей горючую смесь: a – бистабильный режим, b – воспламенение невозможно, v – самовоспламенение

3. Рассмотрим простую экологическую модель. Пусть в среде происходит размножение некоторых животных, численность которых в расчете на единицу объема мы обозначим как n . Предположим, что размножение имеет половой характер, т. е. вероятность рождения¹ нового индивида пропорциональна вероятности встречи мужской и женской особей, т. е. величине n^2 . Тогда с учетом смертности животных и их диффузионного блуждания по среде динамика такой системы описывается уравнением

$$\dot{n} = -\gamma n + \alpha m(n)n^2 + D\Delta n. \quad (1.10)$$

Скорость размножения пропорциональна массе пищи m , которая, конечно, зависит от числа поедающих ее животных. Изменение m со временем, вообще говоря, должно описываться отдельным дифференциальным уравнением, содержащим n .

Ограничимся рассмотрением ситуации, когда масса пищи быстро подстраивается к мгновенной численности животных, так что m представляет собой некоторую убывающую функцию от численности животных n . Чтобы

был невозможен неограниченный рост численности животных в популяции, убывание m должно быть достаточно быстрым, например, экспоненциальным:

$$m = m_0 \exp(-n/n_0), \quad (1.11)$$

где m_0 и n_0 – некоторые постоянные коэффициенты.

При таких условиях рассматриваемая экологическая система также представляет собой бистабильную среду, аналогичную рассмотренным выше, причем нелинейная функция $f(n)$ дается выражением

$$f = -\gamma n + \alpha m_0 \exp(-n/n_0) n^2. \quad (1.12)$$

Эта среда обладает двумя устойчивыми однородными состояниями. В первом из них $n \equiv 0$; такое состояние устойчиво, потому что при низких плотностях n вероятность встречи двух особей (а следовательно, вероятность размножения) очень мала. Во втором устойчивом стационарном состоянии ограничение роста достигается благодаря обеднению пищевых ресурсов.

Эти три простых примера показывают, что бистабильные активные среды, описываемые уравнением

$$\dot{u} = f(u) + D\Delta u, \quad (1.13)$$

могут иметь самую различную природу.

Основным типом структуры, характерным для простых бистабильных сред, является *волна переключения*; при ее распространении элементы среды переходят из одного устойчивого состояния в другое.

Волна переключения из состояния $u = u_3$ в состояние $u = u_1$, движущаяся со скоростью c , представляет собой частное решение уравнения (1.13) вида

$$u = u(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (1.14)$$

с граничными условиями

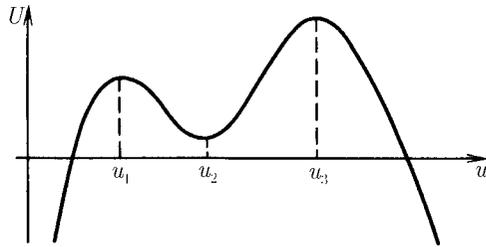
$$\begin{aligned} u &\rightarrow u_3, & \xi &\rightarrow -\infty; \\ u &\rightarrow u_1, & \xi &\rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (1.15)$$

После подстановки (1.14) в (1.13) приходим к уравнению

$$-cu' = f(u) + Du'', \quad (1.16)$$

в котором штрихами обозначены производные по переменной ξ .

¹Конечно, эта модель является крайне упрощенной. В частности, мы принимаем, что локальные численности мужских и женских особей всегда совпадают.

Рис. 1.10. Зависимость потенциала U от координаты u

Чтобы понять наиболее существенные особенности решения, удобно воспользоваться следующей аналогией. Введем функцию

$$U(u) = \int_0^u f(u) du \quad (1.17)$$

и перепишем уравнение (1.16) в форме

$$Du'' = -\frac{\partial U}{\partial u} - cu'. \quad (1.18)$$

Если рассматривать u как координату некоторой частицы, а ξ — как время, нетрудно заметить, что (1.18) совпадает с уравнением движения такой частицы массы D в потенциальном поле $U(u)$ при наличии вязкого трения, пропорционального скорости частицы u' , причем параметр c , т. е. скорость распространения фронта волны, играет в (1.18) роль динамической вязкости.

Легко убедиться, что в точках $u = u_1$ и $u = u_3$ функция $U(u)$ достигает максимума, а в промежуточной точке $u = u_2$ она имеет локальный минимум (рис. 1.10). Предположим вначале, что $U(u_3) > U(u_1)$; это осуществляется согласно (1.17) при выполнении условия $A > 0$, где

$$A = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du. \quad (1.19)$$

Если бы вязкое трение отсутствовало ($c = 0$), частица в потенциальном поле, движение которой задано уравнением (1.18), сохраняла бы энергию

$$\mathcal{E} = U(u) + \frac{1}{2}D\left(\frac{du}{d\xi}\right)^2. \quad (1.20)$$

Тогда частице, находящейся в точке u_3 с более высоким значением потенциала U (рис. 1.10), потребовалось бы лишь конечное время ξ , чтобы попасть в точку u_1 , где потенциал U хотя и достигает локального максимума, но ниже, чем потенциал в точке u_3 . Затем она продолжала бы удаляться в сторону меньших значений координаты u , так что мы имели бы $u \rightarrow -\infty$ при $\xi \rightarrow +\infty$ и условие (1.15) было бы нарушено.

В то же время, если вязкость c слишком велика, частица быстро теряет свою энергию и не может вообще достигнуть перевальной точки u_3 . При $\xi \rightarrow +\infty$ она окажется в точке $u = u_2$, отвечающей локальному минимуму потенциала U .

При заданном потенциале $U(u)$, определяемом согласно (1.17) функцией $f(u)$, существует единственная вязкость $c = c_0$, при которой потеря энергии на трение в точности равна разности потенциалов в точках u_1 и u_3 , т. е. величине $\Delta\mathcal{E} = U(u_3) - U(u_1)$. Это значение и определяет скорость распространения фронта волны переключения (скорость волны).

Таким образом, скорость волны переключения и ее профиль однозначно определяются собственными характеристиками среды. Мы можем также заметить, что скорость волны c_0 убывает с уменьшением разности $\Delta\mathcal{E}$ и обращается в нуль при $U(u_3) = U(u_1)$. Если $U(u_3) < U(u_1)$, т. е. величина A , определяемая равенством (1.19), меньше нуля, волна переключения движется в обратном направлении: $u \rightarrow u_1$ при $\xi \rightarrow -\infty$ и $u \rightarrow u_3$ при $\xi \rightarrow +\infty$, т. е. при ее прохождении состояние среды u_3 сменяется состоянием u_1 .

Приведенные выше рассуждения можно было бы воспроизвести, не прибегая к аналогиям с механической системой. На рис. 1.11 изображены картины фазовых траекторий уравнения (1.18) на плоскости (u, u') в случае $A < 0$. При $c > c_0$ траектория, исходящая из стационарной точки $(u_3, 0)$, попадает в стационарную точку $(u_2, 0)$, тогда как при $c < c_0$ она уходит на бесконечность. Стационарные точки $(u_3, 0)$ и $(u_1, 0)$ являются по стандартной классификации седловыми, а траектория, исходящая из $(u_3, 0)$ или $(u_1, 0)$, есть сепаратриса седловой точки. Таким образом, значению $c = c_0$ (рис. 1.11б) соответствует случай, когда сепаратриса идет из седла $(u_1, 0)$ в седло $(u_3, 0)$.

Общих аналитических методов, позволяющих рассчитывать скорость волны переключения при произвольной функции $f(u)$, не существует.

Тем не менее, в важном частном случае, когда функция $f(u)$ задается полиномом третьего порядка

$$f = -\alpha(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \quad u_1 < u_2 < u_3, \quad (1.21)$$

нетрудно получить точное решение задачи. Скорость волны переключения

тогда равна

$$c_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha D} (u_1 + u_3 - 2u_0). \quad (1.22)$$

Несколько других примеров, допускающих точное решение, приведено в [119].

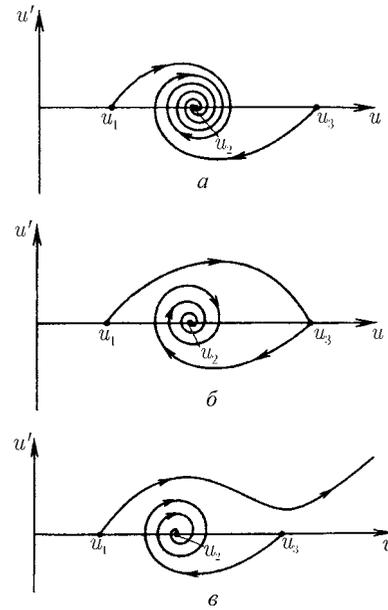


Рис. 1.11. Поведение фазовых траекторий, задаваемых уравнением (1.18), при $c > c_0$ (а), $c = c_0$ (б) и $c < c_0$ (в)

Обычно при расчете скорости волн переключения в бистабильных средах приходится использовать приближенные методы. Первый из них относится к расчету скорости медленных волн.

Как уже отмечалось, при выполнении условия $A = 0$ (см. (1.19)) скорость распространения фронта волны переключения обращается в нуль, т.е. граница раздела между областями с двумя различными стационарными состояниями покоится. Естественно ожидать, что при малых A скорость смещения границы раздела c также невелика.

Если домножить обе части уравнения (1.16) на производную $du/d\xi$ и проинтегрировать по ξ в пределах от $-\infty$ до ∞ , то с учетом условий (1.15) нетрудно получить

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du}{d\xi} \right)^2 d\xi = \int_{u_1}^{u_3} f(u) du. \quad (1.23)$$

Это равенство можно использовать для приближенного нахождения скорости c .

Именно если скорость волны c мала, то профиль этой волны $u(\xi)$ мало отличается от профиля покоящейся границы раздела $u^{(0)}(\xi)$ для $A = 0$. Подставляя в (1.23) вместо $u(\xi)$ функцию $u^{(0)}(\xi)$ и учитывая определение величины A , приближенно получаем

$$c \approx A \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{du^{(0)}}{d\xi} \right)^2 d\xi \right]^{-1}. \quad (1.24)$$

Заметим, что при $A = 0$ профиль стоячей волны переключения $u^{(0)}(\xi)$ дается решением уравнения

$$Du'' = -\frac{\partial U}{\partial u}, \quad (1.25)$$

которое имеет вид

$$\xi = \int_{u_1}^u \frac{1}{\sqrt{(2/D)(U(u_1) - U(u))}} du. \quad (1.26)$$

Формула (1.24) в сочетании с выражением (1.26) определяет скорость распространения *медленных волн переключения*; подчеркнем, что она оказывается пропорциональной величине A .

Другой приближенный способ расчета был предложен в 1938 г. Я. Б. Зельдовичем и Д. А. Франк-Каменецким [62] в теории теплового распространения пламени.

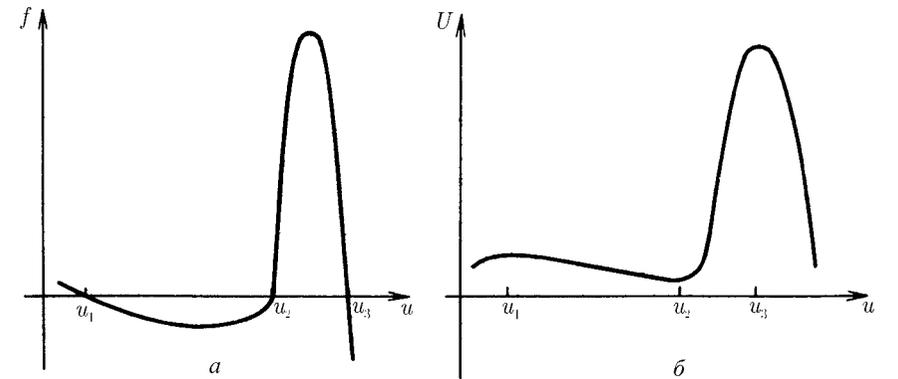


Рис. 1.12. Нелинейная функция $f(u)$ (а) и соответствующий ей потенциал $U(u)$ (б)

Допустим, что нелинейная функция $f(u)$ такова, как показано на рис. 1.12а: она достигает больших положительных значений в узком интервале от u_2 до u_3 и является отрицательной, но малой по модулю в интервале от u_1 до u_2 . Соответствующий потенциал $U(u)$, в котором согласно уравнению (1.18) движется фиктивная частица, изображен на рис. 1.12б.

Анализируя характер движения частицы в потенциале такой формы, можно заметить, что оно делится на две качественно различные стадии.

На участке $u_2 < u < u_3$ происходит быстрый разгон частицы; потенциальная сила $f(u)$ велика, и по сравнению с нею силой вязкого трения $-cu'$ можно пренебречь:

$$Du'' \approx -\frac{\partial U}{\partial u}. \quad (1.27)$$

Согласно этому уравнению, полная энергия частицы сохраняется:

$$\frac{1}{2}D(u')^2 + U(u) = U(u_3), \quad (1.28)$$

и при $u = u_2$ скорость частицы достигает значения

$$\left. \frac{du}{d\xi} \right|_{u=u_2} \approx -\sqrt{(2/D)(U(u_3) - U(u_2))}. \quad (1.29)$$

На участке $u_1 < u < u_2$, наоборот, основную роль в движении частицы играет сила вязкого трения, тогда как потенциальной силой $f(u)$ можно пренебречь:

$$Du'' \approx -cu'. \quad (1.30)$$

Уравнение (1.30) описывает торможение частицы, имевшей начальную скорость $du/d\xi$, даваемую выражением (1.29). Условие $u \rightarrow u_1$ при $\xi \rightarrow \infty$ означает, что длина пути торможения должна составить $u_2 - u_1$. Однако путь можно найти, непосредственно интегрируя уравнение (1.30):

$$u_2 - u_1 = \frac{D}{c} \left. \frac{du}{d\xi} \right|_{u_2}. \quad (1.31)$$

Сравнивая (1.31) и (1.29), находим

$$c = \frac{1}{(u_2 - u_1)} \sqrt{2D(U(u_3) - U(u_2))}. \quad (1.32)$$

Вспомним теперь, что, согласно сделанным выше предположениям величина $U(u_2)$ близка к $U(u_1)$, а значение u_2 мало отличается от u_3 . С учетом этого окончательно получим

$$c \approx \frac{\sqrt{2DA}}{u_3 - u_1}. \quad (1.33)$$

Это приближенное выражение определяет скорость распространения *быстрых волн переключения*.

В заключение кратко обсудим свойства волн переключения из состояния хотя и стационарного, но неустойчивого по отношению к слабым возмущениям. Может возникнуть вопрос: зачем вообще рассматривать эту ситуацию, поскольку, казалось бы, малые флуктуации должны всегда присутствовать и они приведут к разрушению неустойчивого состояния еще до прихода волны переключения. Существует, однако, важный класс задач о заселении среды, где такие флуктуации отсутствуют и неустойчивое стационарное состояние способно сохраняться неограниченно долго.

Пусть, например, в среде идет процесс размножения некоторых микроорганизмов, осуществляющийся путем их деления или репликации. Тогда число новых микроорганизмов, рождающихся в единицу времени в единице объема, пропорционально массе пищи m и числу уже имеющихся в этом объеме микроорганизмов n . С учетом диффузии микроорганизмов в среде распределение их численности подчиняется уравнению

$$\dot{n} = \alpha mn + D\Delta n. \quad (1.34)$$

Ясно, что масса пищи связана с числом имеющихся микроорганизмов. В простейшем случае эту связь можно считать линейной:

$$m = \begin{cases} m_0 - \beta n, & n < n_0, \\ 0, & n \geq n_0, \end{cases} \quad (1.35)$$

где $n_0 = m_0/\beta$.

Такая система имеет два стационарных состояния: $n = 0$ и $n = n_0$. Первое из них отвечает отсутствию в среде микроорганизмов, а второе представляет собой заселенное состояние среды, в котором численность микроорганизмов ограничена ресурсами пищи.

Формально, первое из таких двух стационарных состояний абсолютно неустойчиво по отношению к сколь угодно слабым возмущениям. Тем не менее, поскольку спонтанное рождение микроорганизмов запрещено, такие флуктуации в незаселенном состоянии отсутствуют и оно сохраняется, пока в него не будет внесена «затравка» в виде какого-то числа микроорганизмов.

Уравнение (1.34) было впервые исследовано А. Н. Колмогоровым, И. Г. Петровским и Н. С. Пискуновым в 1937 г. [84]. Оно описывает распространение *волн заселения* среды. В установившемся режиме такие волны являются решением уравнений вида

$$n = n(\xi), \quad \xi = x - ct \quad (1.36)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} n &\rightarrow n_0 & \text{при } \xi &\rightarrow -\infty, \\ n &\rightarrow 0 & \text{при } \xi &\rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Скорость c такой волны заселения однозначно определяется свойствами самой среды; с точностью до численного коэффициента она равна $\sqrt{\alpha m_0 D}$ и не зависит от окончательной численности микроорганизмов n_0 в заселенном состоянии, устанавливаемом после прохождения волны.

3. Общие свойства структур в простых бистабильных средах

Проведенный в разделе 1.2 анализ оставил открытым ряд важных вопросов. В частности, устойчивы ли волны переключения в простых бистабильных средах? Являются ли они единственным возможным типом установившегося волнового режима? Что происходит при столкновении двух таких волн? Какова последующая эволюция произвольного начального распределения?

Обсуждение этих вопросов удобно проводить, переписав предварительно исходное уравнение (1.13) в эквивалентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\delta F[u]}{\delta u(\mathbf{r}, t)}, \quad (1.37)$$

где правая часть выражена как вариационная производная от функционала²

$$F = \int [-U(u(\mathbf{r})) + (1/2)D(\nabla u)^2] d\mathbf{r}, \quad (1.38)$$

а функция $U(u)$ дается выражением (1.17).

Из уравнения (1.37) следует, что величина F не возрастает с течением времени независимо от выбора исходного состояния (распределения) $u(\mathbf{r})$.

²Напомним определение вариационной производной:

$$\frac{\delta F[u]}{\delta u(\mathbf{r}_1)} \equiv \lim_{\int \delta u d\mathbf{r} \rightarrow 0} \frac{F[u + \delta u] - F[u]}{\int \delta u(\mathbf{r}) d\mathbf{r}},$$

где вариация $\delta u(\mathbf{r})$ локализована вблизи точки $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$.

Действительно, производную от F по времени можно выразить как

$$\frac{dF}{dt} = \int \frac{\delta F}{\delta u(\mathbf{r}, t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{r} \quad (1.39)$$

и с учетом (1.37) представить в следующем виде:

$$\frac{dF}{dt} = - \int \left(\frac{\delta F(u)}{\delta u(\mathbf{r}, t)} \right)^2 d\mathbf{r}. \quad (1.40)$$

Устойчивым стационарным состояниям соответствуют минимумы функционала F , а эволюция системы с течением времени заключается в приближении к одному из таких стационарных состояний.

Отметим прежде всего, что стационарные однородные состояния $u(\mathbf{r}) = u_1$ и $u(\mathbf{r}) = u_3$ всегда устойчивы по отношению к малым возмущениям. В самом деле, если слабо возмутить одно из таких решений, добавив к нему зависящую от координат \mathbf{r} поправку $\delta u(\mathbf{r})$, это приведет к изменению функционала F , складывающемуся из двух частей. Во-первых, из-за изменения u возрастает первое слагаемое под знаком интеграла в (1.38) (выбранное нами однородное решение отвечает максимуму U). Во-вторых, становится отличным от нуля второе слагаемое в (1.38), пропорциональное $(\nabla u)^2$ и поэтому также положительное. Мы видим, что обе появляющиеся добавки положительны и, следовательно, малое неоднородное возмущение δu приводит к возрастанию функционала F . Поэтому стационарные однородные состояния u_1 и u_3 являются устойчивыми по отношению к малым возмущениям.

Обсудим теперь эволюцию сильнонеоднородных распределений. Предположим вначале, что рассматриваемая нами система одномерна.

Пусть начальное распределение u таково, что оно нигде не превосходит значения u_2 , отвечающего минимуму функции $U(u)$ (см. рис. 1.10, 1.13 а). Такое распределение, очевидно, не может отвечать минимуму функционала F , поскольку, приближая в каждой точке x величину u к u_1 , можно монотонно уменьшать первое слагаемое $U(u)$ в этой точке, одновременно уменьшая неоднородность решения, что понижает вклад от второго слагаемого под знаком интеграла в (1.38). Подобное начальное распределение будет релаксировать к стационарному однородному состоянию $u = u_1$. Аналогично можно показать, что всякое распределение, для которого в каждой точке значение u оказывается выше u_2 , неустойчиво и релаксирует к однородному распределению $u = u_3$.

Начальное распределение может иметь также форму, показанную на рис. 1.13 б. Распределения такого типа неустойчивы, поскольку всегда

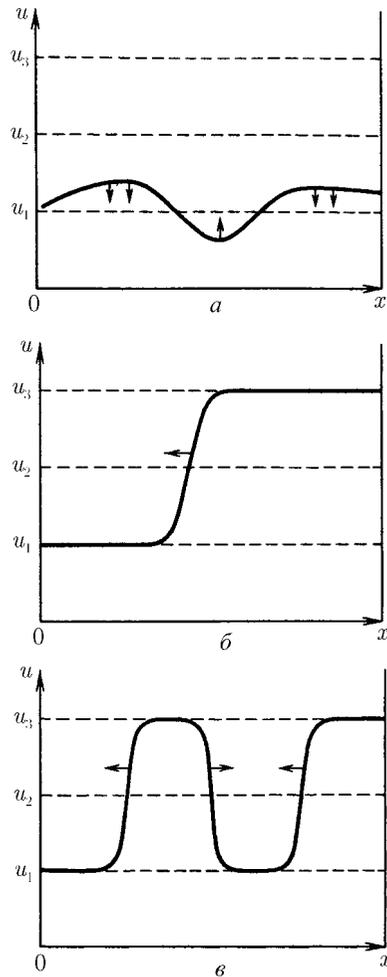


Рис. 1.13. Эволюция различных начальных распределений

можно понизить значение функционала F , сдвигая границу между областями (где u близко к u_1 или u_3) в левую или правую сторону, так что в конце концов установится стационарное однородное распределение. Так как вся-

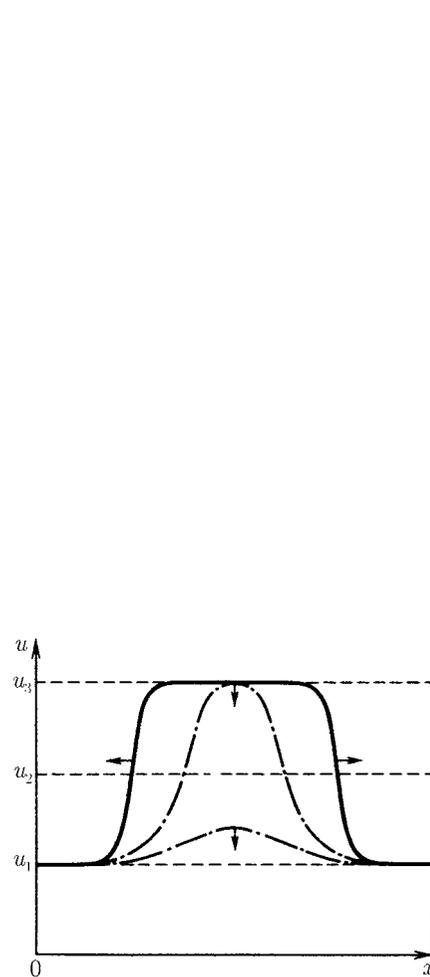


Рис. 1.14. Пример эволюции со временем различных локальных возмущений

кое начальное распределение можно разбить на участки двух упомянутых типов (рис. 1.13в), оно всегда релаксирует к однородному распределению. Это, в частности, означает, что две столкнувшиеся волны переключения полностью гасят друг друга.

Выше мы отмечали, что оба однородных состояния $u = u_1$ и $u = u_3$ устойчивы относительно малых возмущений. Абсолютному минимуму функционала F соответствует, однако, лишь одно из них, для которого значение $U(u)$ является наибольшим (для ситуации, изображенной на рис. 1.10, это состояние $u = u_3$). Если система первоначально находилась в однородном состоянии, которое не отвечает абсолютному минимуму F , то, создав достаточно большое возмущение, ее можно перевести в наиболее устойчивое состояние, отвечающее наиболее глубокому (абсолютному) минимуму F . На рис. 1.14 показано, как эволюционируют со временем малые (штрихпунктирные линии) и большие (сплошная линия) возмущения однородного состояния $u = u_1$.

Существует значительная аналогия между рассматриваемыми явлениями и эффектами фазовых переходов 1-го рода в равновесных физических системах. Основываясь на указанной аналогии, однородные распределения, которые отвечают минимумам F , часто называют *фазами* данной системы, причем если данная фаза соответствует лишь локальному, а не абсолютному минимуму F , ее называют *метастабильной*. Метастабильная фаза неустойчива по отношению к достаточно большим возмущениям: если внутри ее возник довольно крупный *зародыш* устойчивой фазы, он начинает расти (рис. 1.14) и дает начало двум разбегающимся волнам переключения, после расхождения которых среда переходит в наиболее устойчивое стационарное однородное состояние. Критический размер зародыша определяется конкуренцией двух факторов. С одной стороны, образование зародыша, внутри которого u близко к u_3 , выгодно для системы, поскольку это уменьшает первое слагаемое в (1.38). С другой стороны, наличие зародыша означает возникновение в среде неоднородности, а поэтому — появление дополнительного положительного вклада в F , пропорционального $(\nabla u)^2$.

Особой является ситуация, когда оба минимума F при $u = u_1$ и $u = u_3$ имеют одинаковую глубину, т. е. $U(u_1) = U(u_3)$, или

$$\int_{u_1}^{u_3} f(u) du = 0. \quad (1.41)$$

В этом случае в бесконечной среде возможно стационарное сосуществование двух фаз, разделенных плоским переходным слоем. Такое состояние

не отвечает абсолютному минимуму функционала F из-за наличия неоднородности — переходного слоя между фазами. Тем не менее, если среда бесконечна, мы не можем понизить значение F , сдвигая переходный слой. Это означает, что подобное стационарное состояние обладает (нейтральной) устойчивостью.

Если размеры среды конечны и сравнимы с шириной переходного слоя, неоднородные состояния неустойчивы даже при выполнении условия (1.41). Область раздела между фазами выталкивается к границе среды, и, в конце концов, система становится однородной.

Отметим, что фактически среду следует считать бесконечной, когда ее размеры велики по сравнению с шириной переходного слоя. В этом случае при выполнении условия (1.41) среда разбивается на произвольное число областей (доменов, или страт), отвечающих различным фазам.

В конкретных приложениях часто возникает задача расчета *критического зародыша*, которого достаточно, чтобы инициировать переход всей распределенной системы из метастабильного в абсолютно устойчивое однородное состояние. В связи с этим заметим, что форме критического зародыша ставится в соответствие стационарное, но абсолютно неустойчивое неоднородное решение исходного уравнения (1.13).

В одномерном случае форма критического зародыша с центром в точке $x = 0$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$D \frac{d^2 u}{dx^2} + f(u) = 0 \quad (1.42)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad u \rightarrow u_1, \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty \quad (1.43)$$

(мы считаем состояние $u = u_1$ нестабильным). Если домножить уравнение (1.42) на du/dx , проинтегрировать его по x в пределах от 0 до $+\infty$ и учесть граничные условия (1.43), получим равенство

$$\int_{u_1}^{u^*} f(u) du = 0, \quad (1.44)$$

которое определяет значение $u = u^*$ в центре зародыша, т.е. при $x = 0$. Обратим внимание, что u^* всегда меньше u_3 .

В заключение приведем несколько количественных результатов, относящихся к двумерным и трехмерным бистабильным средам.

Ясно, что построенное в разделе 1.2 решение для волн переключения справедливо также для волн с плоским фронтом, распространяющихся в двух- или трехмерной бистабильной среде. Как, однако, будут распространяться волны с искривленным фронтом?

Рассмотрим вначале волны переключения в двумерных возбудимых средах. Очевидно, что всякую волну с искривленным фронтом можно разбить на совокупность достаточно малых участков, каждый из которых представляет собой сегмент окружности. Поэтому найдем закон расширения кругового фронта, радиус R которого велик по сравнению с шириной l переходного слоя.

В полярной системе координат с учетом аксиальной симметрии уравнение (1.13) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + \frac{D}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}. \quad (1.45)$$

Заметим теперь, что фактически производная $\partial u / \partial r$ отлична от нуля лишь в пределах узкого переходного слоя порядка l вблизи значения $r = R$. Поскольку мы считаем, что $R \gg l$, во втором слагаемом справа в уравнении (1.45) можно приближенно положить $r = R$.

Пусть $c(R)$ есть мгновенная скорость распространения фронта с радиусом R . С учетом сделанных выше приближений такой фронт отвечает решению

$$u = u(\xi), \quad \xi = r - c(R)t, \quad (1.46)$$

дифференциального уравнения

$$-c(R)u' = f(u) + (D/R)u' + Du'' \quad (1.47)$$

с граничными условиями $u \rightarrow u_1$ при $\xi \rightarrow +\infty$ и $u \rightarrow u_3$ при $\xi \rightarrow -\infty$. (Заметим, что координата ξ , конечно, не может принимать сколь угодно большие отрицательные значения, но величина u оказывается экспоненциально мало отличающейся от u_3 уже на небольшом удалении от зоны перехода.) Перепишем теперь уравнение (1.47) в форме

$$-[c(R) + D/R]u' = f(u) + Du'' \quad (1.48)$$

и обратим внимание, что оно полностью совпадает с уравнением (1.16) для плоской волны переключения, если положить $c = c(R) + D/R$; идентичны также граничные условия, которым должны удовлетворять решения. Поэтому, если нам известна скорость c движения плоской волны переключения,

скорость распространения фронта с радиусом кривизны R можно выразить как

$$c(R) = c - \frac{D}{R}. \quad (1.49)$$

Следовательно, выпуклый фронт движется медленнее, чем плоский. Более того, если R достаточно мало, направление движения может смениться на обратное. Области достаточно малых размеров не растут, а сокращаются. Критический размер области, при котором она не растет и не сокращается, равен

$$R_{\text{кр}} = \frac{D}{c}. \quad (1.50)$$

Область с радиусом $R = R_{\text{кр}}$ представляет собой критический зародыш новой фазы: если радиус области чуть-чуть увеличить, она начинает расти, если же его слегка уменьшить — область сокращается и исчезает.

Следует, однако, напомнить, что все проведенное выше рассмотрение относится лишь к областям с радиусом гораздо больше ширины l переходного слоя. Поэтому выражение (1.50) применимо лишь в ситуациях, когда радиус критического зародыша достаточно велик, а именно, $R_{\text{кр}} \gg l$. Это условие выполнено, если скорость распространения плоского фронта мала.

Хотя выражение (1.49) было выведено нами только для фронта, выпуклого в направлении области, занимаемой метастабильной фазой, оно справедливо также для вогнутых участков фронта. Если ввести локальную кривизну фронта $K = 1/R$ и считать ее положительной, когда фронт выпуклый, и отрицательной для вогнутых фронтов, скорость движения такого искривленного участка фронта можно записать как

$$c(K) = c - DK. \quad (1.51)$$

Для волн распространения пламени зависимость (1.51) впервые получена в [204]. Заметим, что она обеспечивает устойчивость плоского фронта: если на нем появился выступ, т. е. выпуклый участок, он станет сдвигаться с меньшей скоростью и возмущение формы фронта затухнет.

Для волн переключения в трехмерных возбудимых средах рассмотрение проводится совершенно аналогично. Каждый участок фронтальной поверхности характеризуется своими двумя главными кривизнами K_1 и K_2 . Скорость его смещения равна

$$c(K_1, K_2) = c - D(K_1 + K_2). \quad (1.52)$$

Критический зародыш имеет радиус

$$R_{\text{кр}} = \frac{2D}{c}. \quad (1.53)$$

Выражение (1.53) справедливо лишь при $R_{\text{кр}} \gg l$, где l — ширина слоя, в котором непосредственно происходит переключение от одного стационарного состояния к другому.

4. Бегущие импульсы в возбудимых средах

Чтобы получить вместо бистабильной возбудимую активную среду, необходим какой-либо механизм, который обеспечивал бы возвращение элементов к исходному состоянию после прохождения волны переключения. Рассмотрим, например, следующую ситуацию. Пусть в среде осуществляется процесс горения, но скорость выделения теплоты q зависит не только от температуры Θ , но и от концентрации v некоторого вещества («ингибитора»): $q = q(\Theta, v)$. Ингибитор ухудшает условия горения: чем больше его концентрация, тем меньше выделение теплоты.

При заданном значении v распространение волны горения описывается уравнением

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = f(\Theta, v) + \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad (1.54)$$

где

$$f(\Theta, v) = -\gamma(\Theta - \Theta_1) + \frac{q(\Theta, v)}{C}. \quad (1.55)$$

Как отмечалось в разделе 1.2, скорость и направление перехода в распространяющейся волне зависят от величины

$$A(v) = \int_{\Theta_1}^{\Theta_3} f(\Theta, v) d\Theta. \quad (1.56)$$

Если $A > 0$, то при распространении волны происходит переключение из холодного состояния $\Theta = \Theta_1$ в состояние с высокой температурой $\Theta = \Theta_3$, а, значит, распространяющаяся по среде волна будет волной загорания. Если же $A < 0$, то после прохождения волны среда переходит из горячего в холодное состояние и мы имеем *волну гашения* (рис. 1.15).

Поскольку A зависит от концентрации v ингибитора, то, меняя последнюю, можно управлять волной переключения — изменять ее скорость и даже направление движения. При низких концентрациях v волна будет волной загорания, а при высоких — волной гашения.

Пусть теперь ингибитор выделяется в ходе горения как побочный продукт реакции. Одновременно необходимо предположить, что он способен

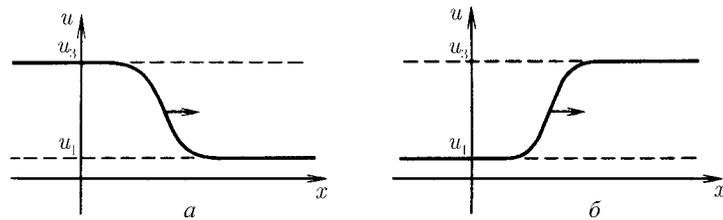


Рис. 1.15. Волны переключения при $A > 0$ (а) и $A < 0$ (б)

распадаться или уходить в окружающую среду — иначе ингибитор просто накапливался бы с течением времени. С учетом этих двух процессов изменение локальной концентрации ингибитора описывается уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}(v - \bar{v}(\Theta)). \quad (1.57)$$

Здесь $\bar{v}(\Theta)$ есть равновесная концентрация ингибитора, устанавливающаяся, если искусственно поддерживать заданную температуру Θ ; она является монотонно растущей функцией Θ . Мы будем считать, что характерное время установления концентрации ингибитора (τ) велико по сравнению с длительностью процесса перехода от холодного к горячему состоянию, т. е. по сравнению с длительностью вспышки загорания. Кроме того, предполагается, что диффузия ингибитора мала и ею можно пренебречь.

Уединенный бегущий импульс в среде, описываемой уравнениями (1.54) и (1.57), имеет вид, показанный на рис. 1.16. Его можно разбить на резкие фронт и спад, где происходит быстрое изменение температуры, а также на области более медленного изменения — вершину импульса и следующий за ним «хвост». Концентрация ингибитора не совершает быстрых изменений — она медленно возрастает при прохождении вершины импульса, а затем столь же плавно спадает до исходного нулевого значения.

Фронт и спад импульса — это фактически две волны (загорания и гашения), движущиеся друг за другом с одинаковой скоростью. Загорание происходит в исходном состоянии, т. е. в отсутствие ингибитора. После того как загорание произошло и температура резко повысилась, концентрация ингибитора возросла, и, когда она достигла некоторой критической величины, горение прекратилось. Температура резко снижается, выделение ингибитора приостанавливается, и его концентрация медленно спадает. В результате среда возвращается в исходное состояние. Теперь по ней можно пустить еще одну волну горения, и т. д.

Распространение уединенного бегущего импульса с последующим возвратом среды к исходному состоянию может быть обеспечено также другим механизмом, не связанным с выделением ингибитора. Рассмотрим в качестве гипотетического примера горение сухой травы в степи. При каждом прохождении волны пламени вся трава сгорает, но затем она очень медленно отрастает вновь, так что степь можно поджечь еще раз.

Два приведенных примера указывают на *типичные ситуации*, в которых можно ожидать появления уединенных бегущих импульсов. Разумеется, совершенно не обязательно, чтобы переменная Θ имела смысл именно температуры.

В химической активной среде с реакцией Белоусова–Жаботинского аналогом горения является процесс окисления одного из веществ. Реакция протекает в слабом растворе и не сопровождается существенными тепловыми эффектами. Если при горении активация («поджиг») элементов среды обусловлена теплопроводностью, то в данном случае главную роль в распространении волны играет диффузия молекул окислителя. Реакция является *самоускоряющейся* (или, как говорят, содержит автокаталитическую стадию).

Структуры, возникающие в среде с реакцией Белоусова–Жаботинского, очень удобны для экспериментального изучения. Реакция идет в обычных лабораторных условиях в тонком слое раствора. Движение волн возбуждения сопровождается локальным изменением цвета этого раствора. Соответствующие процессы достаточно медленные (импульс возбуждения движется со скоростью несколько миллиметров в минуту) и могут наблюдаться невооруженным глазом (размер самых мелких деталей около 1 мм).

Детальная схема реакции Белоусова–Жаботинского сложна и насчитывает более 20 промежуточных стадий. В упрощенном виде, учитывая различие в скоростях отдельных реакций, ее можно свести [251, 119] к системе уравнений для концентраций u и v двух веществ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1 - u) - \frac{v(u - a)}{(u + a)} + D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}(v - bu). \quad (1.58)$$

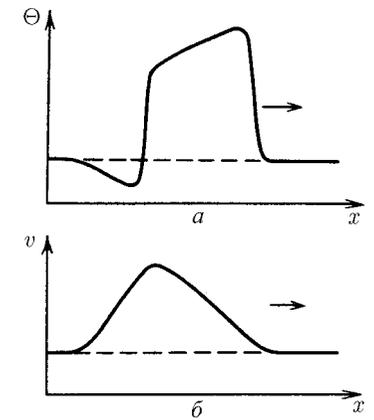


Рис. 1.16. Уединенный бегущий импульс в возбудимой среде. Показаны профили температуры (а) и концентрации ингибитора (б)

Вторая из переменных, v , медленно меняется во времени и играет роль концентрации ингибитора, подавляющего процесс окисления; его диффузия в уравнениях (1.58) не учитывается. Переменную u обычно называют концентрацией активатора.

Близкими уравнениями вида

$$\begin{aligned} C \frac{\partial U}{\partial t} &= I_{\text{Na}}(U) - I_{\text{K}}(U, \sigma) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau} [\sigma - \bar{\sigma}(U)] \end{aligned} \quad (1.59)$$

приближенно описывается распространение импульса возбуждения вдоль нервного волокна. В первом из этих уравнений C — емкость мембраны на единицу длины волокна; R — удельное сопротивление аксоплазмы, заполняющей волокна; I_{Na} и I_{K} — значения локального натриевого и калиевого токов через мембрану; $\bar{\sigma}(U)$ — установившееся значение проводимости по отношению к калиевому току при заданной разности потенциалов. Обратим внимание, что процесс подстраивания калиевой проводимости σ к имеющейся разности потенциалов U на мембране является медленным и характеризуется большим временным масштабом τ .

Аналогичные уравнения справедливы для мышечных волокон, которые образуют поперечно-полосатые и гладкие мышцы, выстилающие полые органы, а также ткань сердца. Подробнее о биологических и других примерах возбуждимых сред можно прочитать в [36, 37, 89].

Итак, широкий класс возбуждимых сред самой различной природы описывается уравнениями типа

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + D \Delta u, \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial t} = -v + \bar{v}(u), \quad (1.60)$$

где $\bar{v}(u)$ — монотонно возрастающая функция, а параметр ϵ мал ($\epsilon \ll 1$). Нас интересует случай, когда есть всего одно устойчивое однородное состояние такой среды. Это имеет место, если две нуль-изоклины $f(u, v) = 0$ и $v = \bar{v}(u)$ однородной системы (1.60) без диффузии пересекаются в одной единственной точке A , отвечающей состоянию покоя (рис. 1.17).

Согласно уравнениям (1.60) величина v является медленной — характерное время ее изменения имеет порядок $1/\epsilon$, тогда как величина u может существенно изменяться за гораздо меньшее время порядка единицы (в выбранных нами безразмерных переменных). Следовательно, на фронте и спаде бегущего импульса, где происходит резкое изменение u , ее в первом приближении можно считать постоянной. Это означает, что поведение u

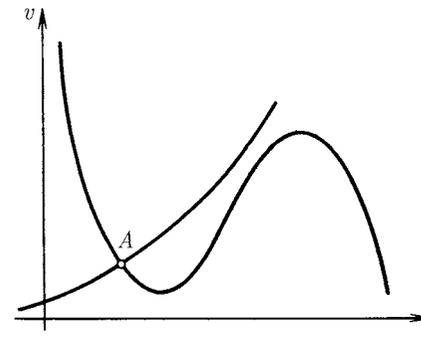


Рис. 1.17. Нуль-изоклины уравнений, описывающих возбудимую среду

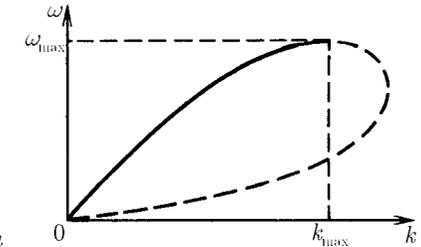


Рис. 1.18. Типичный вид закона дисперсии нелинейных периодических волн в возбудимой среде

на фронте и спаде описывается первым из уравнений (1.60), в котором v — заданный параметр. Но оно в точности совпадает с уравнением (1.13), рассматривавшемся при изучении волн переключения.

Следовательно, фронт импульса есть волна переключения, и ее скорость (а следовательно, скорость всего бегущего импульса) определяется решением первого из уравнений (1.60) при значении $v = v_0$, отвечающем состоянию покоя. Спад импульса — волна обратного переключения, которая должна бежать вслед за фронтом с той же самой скоростью. Это условие определяет значение переменной v , при котором происходит обратное переключение в установившемся бегущем импульсе.

Более строго задача о расчете уединенного бегущего импульса формулируется следующим образом. Перейдем в систему координат $\xi = x - V_0 t$, в которой импульс покоится. Тогда уравнения (1.60) перейдут в систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-V_0 u' = f(u, v) + D u'', \quad -(V_0/\epsilon) v' = \bar{v}(u) - v, \quad (1.61)$$

которую мы должны решать, потребовав выполнения условий $u \rightarrow u_0$ и $v \rightarrow v_0$, $\xi \rightarrow \pm\infty$, где (u_0, v_0) — стационарное однородное состояние покоя. Наличие такого решения означает существование петли сепаратрисы стационарной седловой точки A , отвечающей состоянию покоя, а это возможно лишь при определенном значении параметра V_0 в уравнениях (1.61). Таким образом, скорость уединенного импульса находится путем решения нелинейной задачи на собственное значение. При малых значениях ϵ спра-

ведливо разложение [151]

$$V_0 \approx c_0(l - \zeta\epsilon), \quad (1.62)$$

где c_0 представляет собой скорость волны переключения, описываемой первым из уравнений (1.60) при $v = v_0$, а ζ есть некоторый коэффициент порядка единицы.

Разумеется, уравнения (1.60) допускают и периодическое распространение импульсов. Если период L следования импульсов достаточно велик, скорость их движения совпадает со скоростью одиночного импульса. Однако с уменьшением L скорость движения уменьшается, поскольку фронт следующего импульса начинает наступать на «хвост» предыдущего, и распространение фронта идет на фоне остаточной концентрации ингибитора, превышающей стационарный уровень v_0 .

Периодическая последовательность импульсов описывается решением вида $u = u(\eta)$, $v = v(\eta)$, где $\eta = kx - \omega t$; $u(\eta + 2\pi) = u(\eta)$, $v(\eta + 2\pi) = v(\eta)$. Оно удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-\omega u' = f(u, v) + Dk^2 u'', \quad -(\omega/\epsilon)v' = \bar{v}(u) - v \quad (1.63)$$

и соответствует предельному циклу этой системы. При произвольных значениях параметров ω и k период такого предельного цикла по фазовой координате η может быть различным. Потребовав, чтобы он был равен 2π , мы получим соотношение, связывающее ω и k , которое естественно назвать *законом дисперсии* нелинейных периодических волн: $\omega = \Omega(k, \epsilon)$.

Типичный вид закона дисперсии показан на рис. 1.18. Правая ветвь дисперсионной зависимости, обозначенная штриховой кривой, описывает медленные волны и соответствует неустойчивым режимам. Вообще говоря, область неустойчивости захватывает и часть области быстрых волн (сплошная кривая). Однако до настоящего времени отсутствуют аналитические расчеты положения границы устойчивости. Поэтому часто приближенно полагают, что устойчива вся левая ветвь дисперсионной зависимости.

Существует, таким образом, минимальный пространственный период устойчивого следования импульса $L_{\min} = 2\pi/k_{\max}$, по порядку величины он равен ширине отдельно бегущего импульса. Ему соответствует максимальная возможная частота следования импульсов $\omega_{\max} \sim \sqrt{\epsilon}$.

Как отмечалось в разделе 1.2, даже аналитический расчет скорости волны переключения в простых бистабильных средах обычно невозможен. В еще большей степени это относится к характеристикам бегущих импульсов в возбудимых средах. Обычно здесь приходится прибегать к численным

расчетам. Важным исключением является так называемая *модель Ринцеля–Келлера*, описываемая уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u + \bar{u}\Theta(u - u_0) - v + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial t} = u, \quad (1.64)$$

где ступенчатая функция Хевисайда определена как $\Theta(z) = 0$ при $z < 0$ и $\Theta(z) = 1$ при $z \geq 0$.

Закон дисперсии нелинейных периодических волн в модели Ринцеля–Келлера был аналитически рассчитан в [207]. Максимальная частота одномерной последовательности волн дается в этой модели выражением

$$\omega_{\max} = \frac{\pi\epsilon}{\operatorname{arctanh}(\sqrt{3\epsilon/2\mu})}, \quad (1.65)$$

где $\mu = (1/2) - u_0/u$. Самоподдерживающееся распространение волн невозможно при $\mu < \sqrt{3\epsilon/2}$. Максимальное волновое число составляет

$$k_{\max} = \frac{\pi\sqrt{\epsilon/3}}{\operatorname{arctanh}(\sqrt{3\epsilon/2\mu})}. \quad (1.66)$$

При выполнении условия $\mu \ll 1$ закон дисперсии плоских волн вплоть до значения $k = k_{\max}$ хорошо аппроксимируется неявным выражением

$$\omega = 4k\mu\operatorname{th}\pi\nu - 3\nu k^2, \quad \text{где } \nu = \frac{\epsilon}{\omega}. \quad (1.67)$$

Заметим, что решение для периодической последовательности импульсов, имеющей пространственный период следования L , описывает также и движение одиночного импульса по окружности параметра L .

Для двумерной возбудимой среды одиночному бегущему импульсу соответствует уединенная волна возбуждения. Обсудим вкратце, какой может быть зависимость скорости распространения такой волны от кривизны ее фронта.

Чтобы найти зависимость скорости волны V от кривизны ее фронта K , введем на плоскости мгновенную полярную систему координат, в которой локально фронт описывается окружностью радиуса $R = 1/K$ с центром в начале координат. Если радиус кривизны гораздо больше ширины волны (т. е. ширины импульса возбуждения), приближенно можно записать

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + \frac{D}{R} \frac{\partial u}{\partial r} + D \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial v}{\partial t} = \bar{v}(u) - u. \quad (1.68)$$

Радиальному распространению со скоростью V отвечает решение $u = u(\xi)$, $v = v(\xi)$, где $\xi = r - Vt$. Оно удовлетворяет уравнениям

$$-(V + DK)u' = f(u, v) + Du'', \quad -(V/\epsilon)v' = \bar{v}(u) - u. \quad (1.69)$$

Нетрудно заметить, что они переходят в уравнения (1.61), описывающие распространение одиночного импульса, если положить $\tilde{V} = V + DK$ и заменить в (1.61) ϵ на $\epsilon^* = (V + DK)\epsilon/V$. Следовательно, \tilde{V} должно выражаться через ϵ^* по закону (1.62), полученному для одиночного импульса.

Подставляя выражения для \tilde{V} и ϵ^* в (1.62) и решая возникающее уравнение, находим

$$\frac{V}{c_0} = \frac{1}{2} \left(1 - \zeta\epsilon - \frac{DK}{c_0} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(1 - \zeta\epsilon - \frac{DK}{c_0} \right)^2 - 4\zeta\epsilon \frac{DK}{c_0} \right]^{1/2}. \quad (1.70)$$

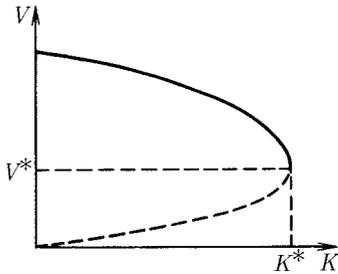


Рис. 1.19. Зависимость скорости распространения волны в двумерной возбудимой среде от кривизны ее фронта

Найденная зависимость показана на рис. 1.19. Никакие волны не могут распространяться с кривизной, превышающей

$$K^* = \frac{c_0}{D} (1 - 2\sqrt{\zeta\epsilon}). \quad (1.71)$$

При $K < K^*$ имеются две ветви, из которых нижняя (штриховая кривая) всегда неустойчива. Данные численного моделирования [65] свидетельствуют, что для верхней ветви (сплошная кривая) волна остается устойчивой, вплоть до значений кривизны ее фронта, довольно близких к предельному возможному значению K^* .

Почувительно сравнить особенности распространения искривленных волн переклочки в простых бистабильных средах с полученными выше результатами для движения искривленных волн возбуждения в двумерных возбудимых средах. Как отмечалось в разделе 1.3, скорость движения волны переключения связана с ее кривизной простым линейным законом $c = c_0 - DK$. В частности, при достаточно большой кривизне фронт может остановиться и даже начать движение в обратном направлении. Для волн возбуждения это невозможно. При достижении достаточно большой кривизны фронта, близкой к величине K^* , волна теряет устойчивость и разрушается. Она не может остановиться или поменять направление движения. Волны, кривизна фронта которых близка к пределу устойчивости, продвигаются вперед со скоростью, близкой к $V^* = \sqrt{\zeta\epsilon}$.

5. Процессы в возбудимых средах, образованных клеточными автоматами

Здесь рассматриваются волновые процессы в дискретных сетях, образованных связанными между собой возбудимыми элементами. В отличие от раздела 1.4 мы не предполагаем, что отдельный такой элемент описывается дифференциальными уравнениями с непрерывно меняющимися переменными. Вместо этого для каждого элемента теперь заданы определенные *правила перехода* между состояниями: состояние данного элемента в момент времени $n + 1$ однозначно определено состоянием этого элемента и его ближайших соседей по сети в предыдущий, дискретный момент времени n . Это означает, что мы моделируем возбудимую среду как сеть *клеточных автоматов*.

Прибегать к таким моделям приходится главным образом по двум обстоятельствам.

Даже если известны точные дифференциальные уравнения (например, вида (1.60)), которые описывают интересующую нас среду, как правило, не удается найти аналитические решения этих уравнений и необходимо проводить численные расчеты. Если задача заключается в исследовании волновых процессов, связанных с образованием и развитием структур в таких двумерных (а тем более трехмерных) средах, расчеты оказываются чрезвычайно трудоемкими. В этой ситуации (в особенности когда нас интересуют в первую очередь качественные результаты) можно отказаться от численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений и обратиться к анализу гораздо более простых систем, представляющих собой сети клеточных автоматов. Как показывают расчеты, их динамика достаточно хорошо воспроизводит основные черты соответствующих явлений в распределенных возбудимых средах.

Кроме того, есть много примеров, когда именно модели дискретных сетей, а не приближение сплошной среды, являются наиболее адекватными. Важнейший из них — нейронные сети, а также живые ткани, образованные переплетенными мышечными волокнами (в частности, ткань сердечной мышцы).

В 1946 г. Н. Винер и А. Розенблют [38] предложили простую модель, позволяющую исследовать различные режимы распространения возбуждения по однородной нейронной сети (со связями лишь между соседними нейронами) и ткани сердечной мышцы. Согласно такой модели, среда представляет собой совокупность отдельных элементов, способных находиться в одном из трех состояний: покоя, возбуждения и рефрактерности. Будучи приведенным в возбужденное состояние, элемент пребывает в нем в те-

чение некоторого времени³, затем переходит в состояние рефрактерности и лишь после этого возвращается в состояние покоя. Элемент среды может перейти в возбужденное состояние благодаря внешнему воздействию либо если по соседству с ним оказался возбужденный элемент. Переход в возбужденное состояние возможен лишь из состояния покоя.

Ниже мы подробно рассмотрим обобщенную модель Винера–Розенблюта, в которой дополнительно учтен пороговый характер активации и временное суммирование приходящих сигналов [67].

Пусть двумерная сеть образована элементами, нумеруемыми парой целых индексов i и j . Состояние каждого элемента задается двумя величинами ϕ_{ij}^n и u_{ij}^n , верхний индекс n указывает дискретный момент времени. Переходы между состояниями осуществляются согласно следующему набору правил:

$$\phi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} \phi_{ij}^n + 1, & \text{если } 0 < \phi_{ij}^n < \tau_e + \tau_r, \\ 0, & \text{если } \phi_{ij}^n = \tau_e + \tau_r, \\ 0, & \text{если } \phi_{ij}^n = 0, u_{ij}^{n+1} < h, \\ 1, & \text{если } \phi_{ij}^n = 0, u_{ij}^{n+1} \geq h \end{cases} \quad (1.72)$$

(τ_e — дискретная длительность возбужденного состояния, τ_r — дискретная длительность рефрактерного состояния). Переменная ϕ_{ij}^n имеет смысл фазы элемента, находящегося в узле (i, j) , в момент времени n . Значение фазы $\phi_{ij}^n = 0$ отвечает состоянию «покоя». Если $0 < \phi_{ij}^n \leq \tau_e$, элемент находится в состоянии «возбуждения». Состоянию рефрактерности соответствуют значения $\tau_e < \phi_{ij}^n \leq \tau_e + \tau_r$. Согласно (1.72), переход элемента из узла (i, j) от состояния покоя к возбужденному состоянию происходит при превышении величиной u_{ij}^{n+1} порога h . Затем элемент совершает фиксированную последовательность переходов, при каждом из которых значение фазы возрастает на единицу, а при достижении фазой значения $\tau_e + \tau_r$ возвращается к исходному состоянию покоя.

Величина u_{ij}^n есть концентрация активатора в узле (i, j) в момент времени n . Мы считаем, что в узлах сети идут процессы распада и производства активатора, причем активатор производится лишь элементами, находящимися в данный момент времени в возбужденном состоянии:

$$u_{ij}^{n+1} = gu_{ij}^n + \sum_{k,l} C(k,l)J_{i+k,j+l}^n, \quad (1.73)$$

³В [38] продолжительность возбужденного состояния предполагалась пренебрежимо малой (мгновенной); модель с конечным временем возбуждения была предложена позднее А. Розенблютом [239].

где

$$J_{ij}^n = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < \phi_{ij}^n \leq \tau_e, \\ 0, & \text{если } \tau_e < \phi_{ij}^n \leq \tau_e + \tau_r \text{ или } \phi_{ij}^n = 0. \end{cases} \quad (1.74)$$

Коэффициенты $C(k, l)$ быстро спадают с увеличением расстояния до данного узла. Обычно достаточно ограничиться учетом вклада от ближайших соседей, т. е. положить

$$C(k, l) = \begin{cases} 1, & \text{если } |k| \leq 1, |l| \leq 1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.75)$$

Модель, задаваемая правилами перехода (1.72)–(1.74), переходит в первоначальную модель Винера–Розенблюта, если в ней положить $h = 1$, $g = 0$ и выбрать $C(k, l)$ в виде (1.75). Тогда возбужденный элемент возбуждает на следующем шаге по времени любой из покоящихся элементов, которые находятся по соседству с ним. Если же $h > 1$, $0 < g \leq 1$, то элемент выжидает перехода, пока не будет накоплено пороговое значение h концентрации активатора — либо за счет временной суммации, либо благодаря притоку активатора одновременно от нескольких соседних элементов. Время выжидания тем больше, чем меньше число соседних элементов возбуждено. Благодаря этому появляется зависимость скорости распространения волны возбуждения от формы ее фронта.

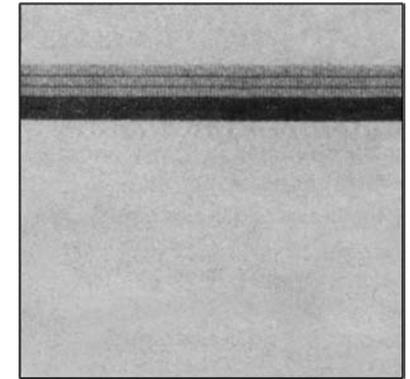


Рис. 1.20. Плоская волна возбуждения в среде из клеточных автоматов. Темные участки — область возбуждения, серые — область рефрактерности, белые — область покоя

Таким образом, параметр h имеет смысл порога возбуждения данной среды, а величина $1/(1-g)$ есть характерное время полураспада активатора.

При различных соотношениях параметров рассматриваемая модель демонстрирует значительное разнообразие режимов⁴.

Если $h = 3$, то по среде могут распространяться плоские волны возбуждения, движущиеся со скоростью $V = 1$ (рис. 1.20). Их фронт смещается

⁴Изолагаемые ниже результаты получены одним из авторов (А. С. М.) совместно с Б. Доржсурэнгийнгом.

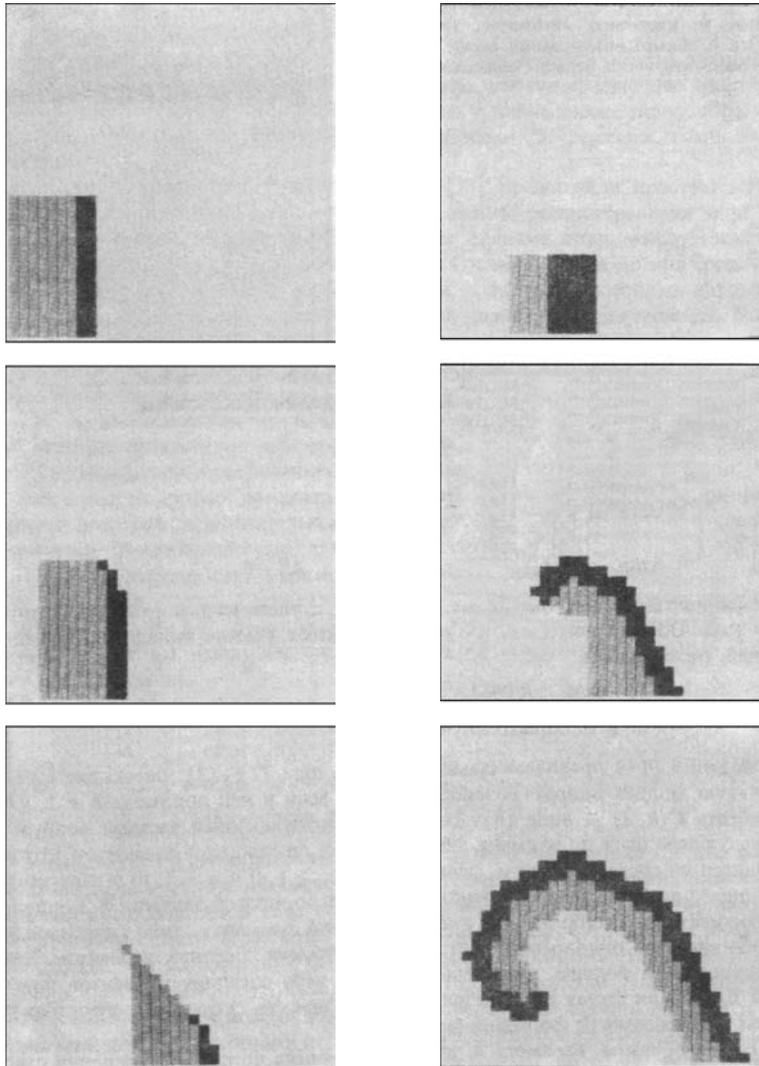


Рис. 1.21. Эволюция начального распределения в виде полуволны для среды с недостаточно высокой возбудимостью ($\tau_e = 2$, $\tau_r = 7$, $g = 0,3$, $h = 3$)

Рис. 1.22. Рождение спиральной волны из обрыва в среде с достаточно высокой возбудимостью ($\tau_e = 5$, $\tau_r = 7$, $g = 0,3$, $h = 3$)

на один элемент решетки за каждый шаг по времени; волна имеет суммарную ширину $\tau_e + \tau_r$. При $h > 3$ плоские волны движутся с меньшими скоростями ($V \leq 1/2$), т. е. фронт смещается на каждый второй либо на каждый третий и т. д. такт по времени. Чтобы распространение волны в этом случае было возможно, распад активатора не должен быть слишком быстрым, т. е. g не должно превышать определенное критическое значение, зависящее от h и τ_e .

Поскольку состояние среды до и после прохождения волны возбуждения одинаково, ничто не препятствует созданию начального распределения в виде оборванной полуволны (рис. 1.21). Какой будет последующая эволюция такого начального распределения? Оказывается, что ответ существенно зависит от эффективной *возбудимости* среды, определяемой значением порога возбуждения h , длительностью возбужденного состояния τ_e и значением коэффициента g .

Если возбудимость среды низка (рис. 1.21), полуволна сокращается с течением времени и начальное возмущение затухает. Подобрав значения параметров, можно добиться того, чтобы волна двигалась вперед, не сокращаясь и не «прорастая».

При более высокой возбудимости среды волна возбуждения «прорастает» на своем свободном конце, одновременно отставая. В результате из обрыва волны возбуждения рождается вращающаяся спиральная волна (рис. 1.22). При не очень высокой возбудимости эта волна является достаточно «рыхлой»: между витками спирали расположены участки, где элементы пребывают в состоянии покоя. Свободный конец совершает движение вокруг покоящейся области — ядра спиральной волны, которое в данном случае велико. Если возбудимость среды высока, спиральная волна «намотана» более плотно. В этом случае ядро спиральной волны малó.

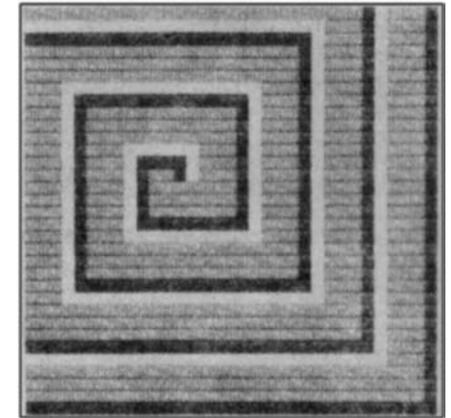


Рис. 1.23. Спиральная волна в модели Винера–Розенблюта

Спиральная волна для модели Винера–Розенблюта показана на рис. 1.23. Мы видим, что здесь ядро спиральной волны (покоящаяся область в ее центре) вообще отсутствует.

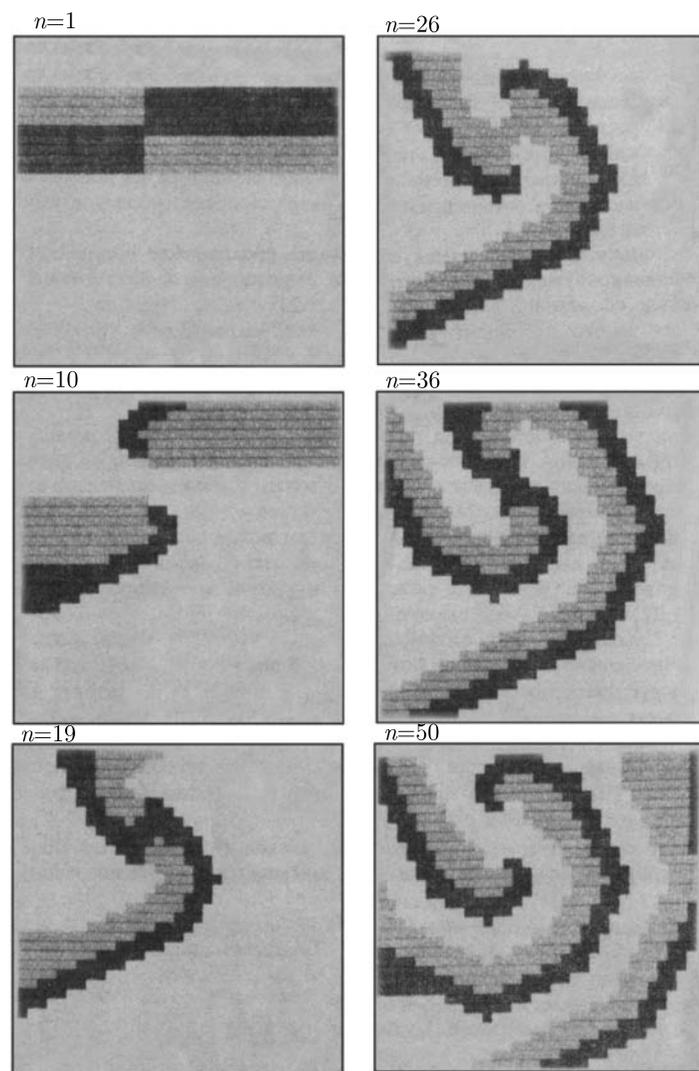


Рис. 1.24. Образование двухрукавной спиральной волны ($\tau_e = 5$, $\tau_r = 7$, $g = 0, 4$, $h = 3$)

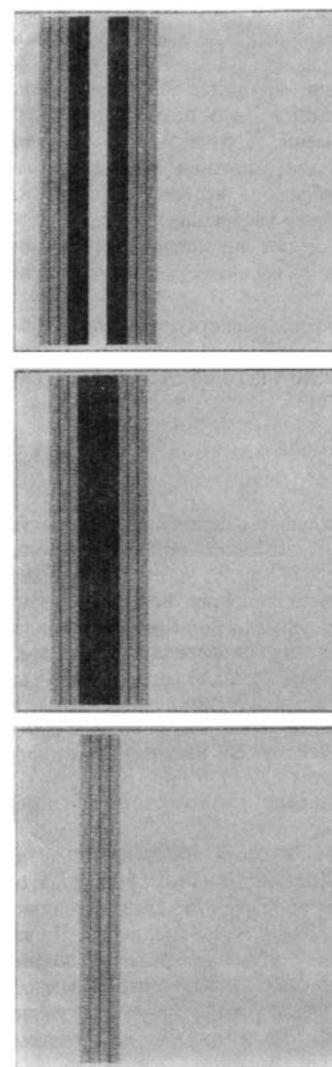


Рис. 1.25. Аннигиляция двух волн в результате их столкновения

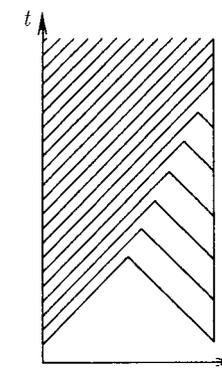


Рис. 1.26. Схематическое изображение временной развертки волн от двух источников с разными периодами генерации

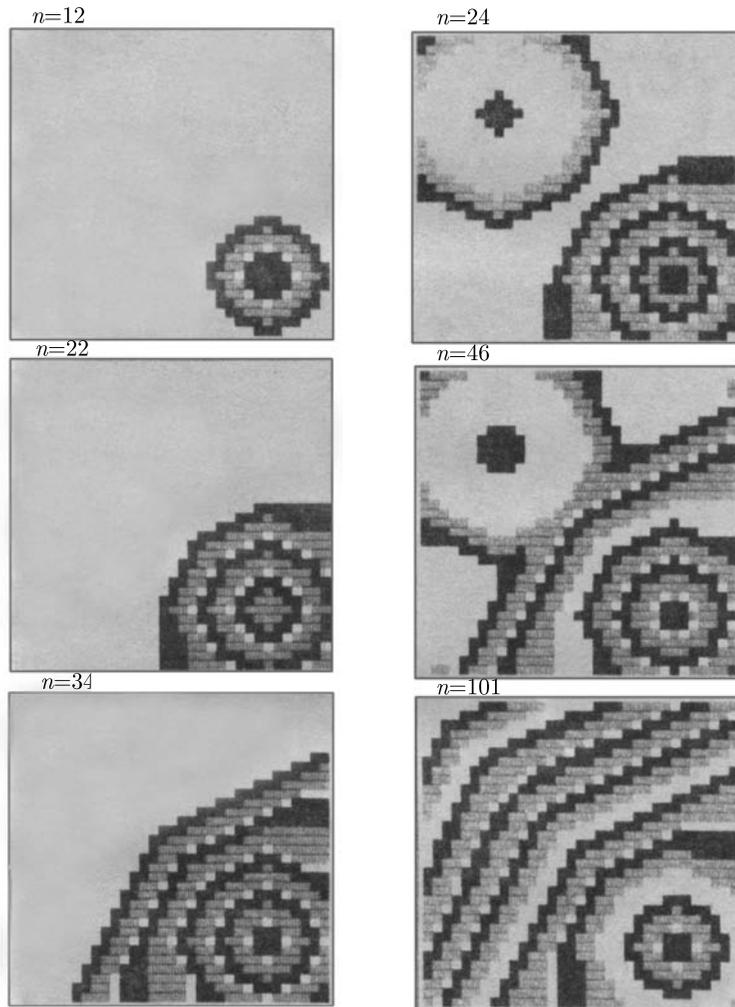


Рис. 1.27. Пейсмекер, генерирующий периодическую последовательность волн ($\tau_e = 3$, $\tau_r = 4$, $g = 0, 5$, $h = 3$, $T = 9$)

Рис. 1.28. Подавление низкочастотного пейсмекера высокочастотным

Если задать начальное распределение в виде двух полуволн, ориентированных навстречу друг другу, из него развивается двухрукавная спиральная волна (рис. 1.24); обратите внимание на нестационарность процесса в центральной области такой волны и последовательное «перезамыкание» волн.

Из приведенных иллюстраций видно, что сталкивающиеся волны возбуждения аннигилируют, т. е. гасят друг друга. Это весьма общее свойство волн в возбудимых средах. Действительно, при столкновении двух таких волн возбужденные элементы оказываются зажатыми с двух сторон элементами, находящимися в состоянии рефрактерности, и не способны передать возбуждение другим элементам среды (рис. 1.25).

Аннигиляция волн при их столкновении приводит к одному очень важному эффекту. Если в такой среде действует несколько периодических источников волн, то с течением времени источник, генерирующий волны с максимальной частотой, подавляет все остальные источники. Как видно из рис. 1.26, где схематически изображена временная развертка волн от двух источников с разными периодами генерации T_1 и T_2 , с каждым последующим столкновением точка, где оно происходит, смещается все ближе в направлении к более медленному источнику, и в конце концов деятельность его подавляется.

Чтобы получить локальный периодически действующий источник волн, или *пейсмекер*, достаточно взять группу автоколебательных элементов, для которых фаза ϕ меняется не согласно (1.72), а по простому закону

$$\phi_{ij}^{n+1} = \begin{cases} \phi_{ij}^n + 1, & \text{если } \phi_{ij}^n < T - 1, \\ 0, & \text{если } \phi_{ij}^n \geq T - 1. \end{cases} \quad (1.76)$$

Ясно, что каждый такой элемент будет совершать, независимо от своего окружения, колебания с периодом T . Если поместить достаточно большую группу таких элементов в возбудимую среду, последняя играет роль источника концентрических распространяющихся волн возбуждения (рис. 1.27). Заметим, что фактический период генерации волн совпадает с T , лишь если $T \geq \tau_e + \tau_r + 1$. В противном случае среда «пропускает» некоторые такты активации, поскольку автоколебательные элементы, находящиеся в состоянии рефрактерности, и не способны породить волну возбуждения. В результате пейсмекер начинает генерировать волны с более высоким кратным периодом $2T$, $3T$ и т. д.

Рис. 1.28 иллюстрирует эффект подавления низкочастотного пейсмекера высокочастотным.

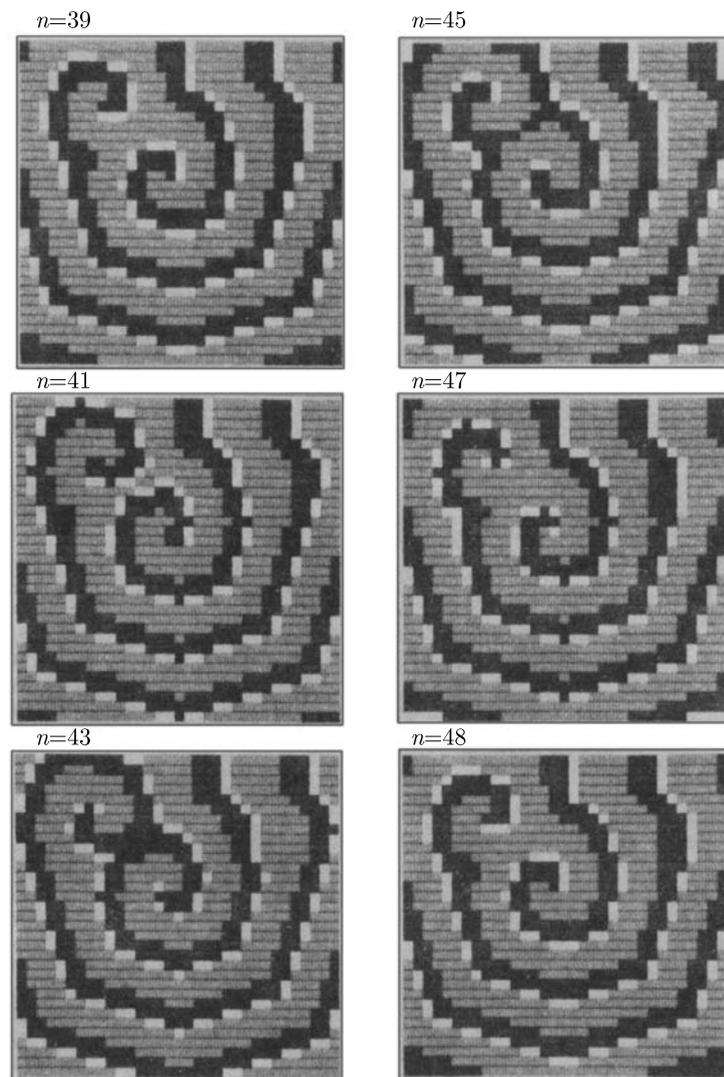


Рис. 1.29. Сосуществование двух спиральных волн в возбудимой среде ($\tau_e = 3$, $\tau_r = 5$, $g = 0, 55$, $h = 2, 5$)

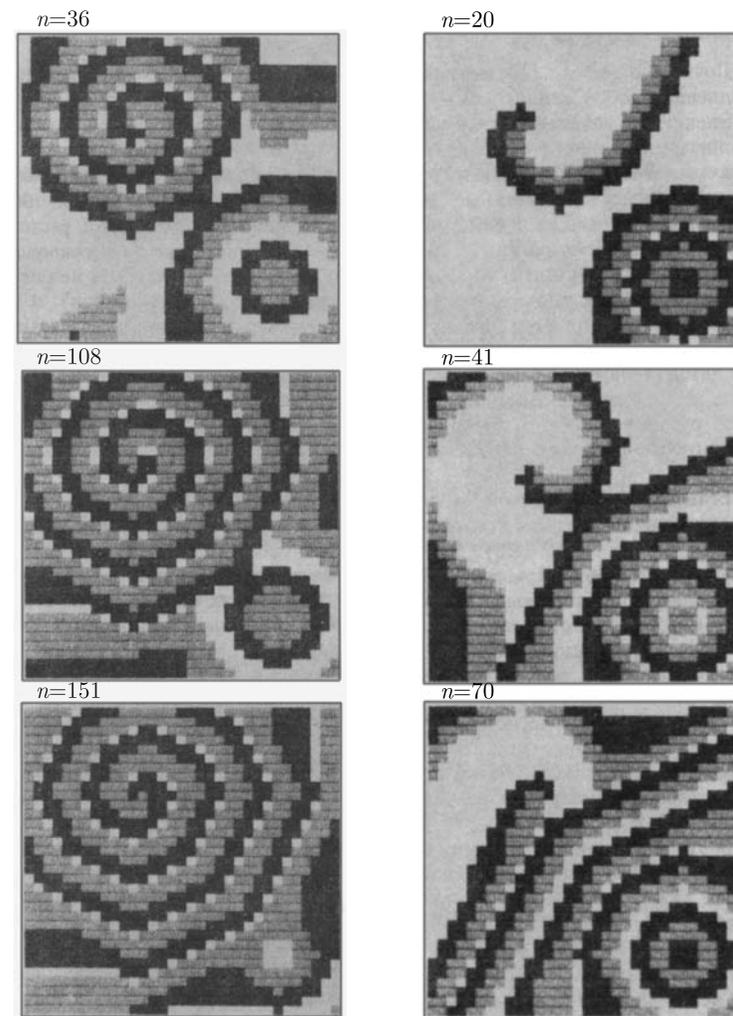


Рис. 1.30. Подавление низкочастотного пейсмекера спиральной волной

Рис. 1.31. Вытеснение спиральной волны высокочастотным пейсмекером ($\tau_e = 4$, $\tau_r = 4$, $g = 0, 4$, $h = 3$, $T = 6$)

В отличие от пейсмекеров, образование которых обусловлено неоднородностью активной среды, т. е. присутствием внутри нее группы автоколебательных элементов, спиральные волны являются локальными источниками автоволн, не привязанными к какой-либо неоднородности. Положение центра спиральной волны определяется лишь начальными условиями, сложившимися при ее зарождении. Все спиральные волны в данной среде имеют одинаковую частоту циркуляции. Поэтому две спиральные волны, будучи автоволновыми источниками, не подавляют с течением времени друг друга (рис. 1.29).

Своеобразные эффекты наблюдаются при взаимодействии спиральной волны с пейсмекером. Если частота генерации волн пейсмекером ниже частоты циркуляции спиральной волны, последняя подавляет пейсмекер (рис. 1.30). При обратном соотношении частот спиральная волна вырождается в дополнительную полуволну (своеобразную «дислокацию»), которая, испытывая последовательные переаппетывания, постепенно вытесняется все дальше на периферию пейсмекера (рис. 1.31).

6. Спиральные волны в распределенных возбудимых средах

Почти все эффекты, отмечавшиеся в разделе 1.5 для возбудимых сред, представляющих собой сети из дискретных автоматов, сохраняются для распределенных возбудимых сред. Об этом свидетельствуют как имеющиеся результаты численного моделирования автоволновых процессов в таких средах, так и данные экспериментальных исследований. Одним из наиболее удобных объектов для таких исследований служит химическая возбудимая среда, представляющая собой тонкий неперемешиваемый слой раствора, в котором протекает реакция Белоусова – Жаботинского⁵. Преимущества этой системы состоят в том, что автоволновые структуры в ней имеют макроскопические размеры (порядка нескольких миллиметров), а процессы эволюции структур являются достаточно медленными (с характерными временами порядка минуты). Это существенно упрощает регистрацию автоволновых эффектов. Недавно была предложена [188] модификация этой реакции с заменой ферроина в качестве катализатора на соединение рутения $Ru(dipy)_3$. Модифицированная реакция оказалась светочувствительной: меняя освещенность, можно управлять возбудимостью среды.

⁵Подробное описание этой реакции, а также обзор работ по анализу ее химического механизма приведены в [119].

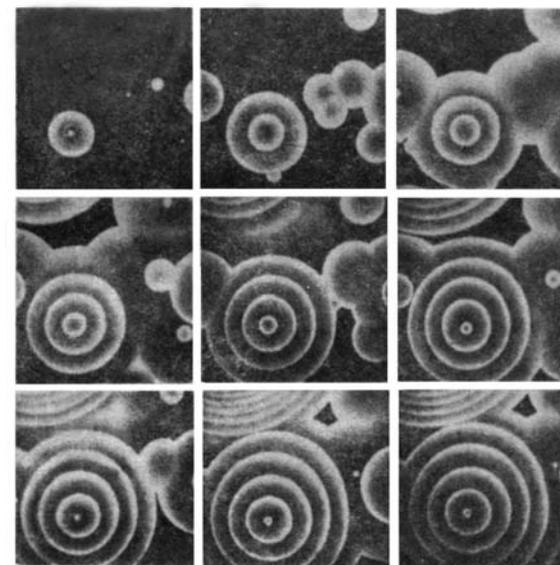


Рис. 1.32. Ведущие центры в среде с реакцией Белоусова – Жаботинского. Интервалы между кадрами 30 с

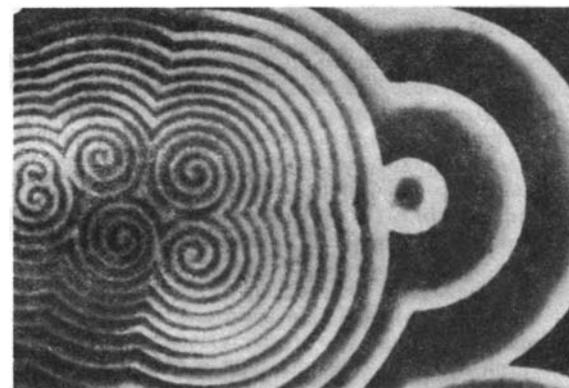


Рис. 1.33. Спиральные волны и ведущий центр в среде с реакцией Белоусова – Жаботинского

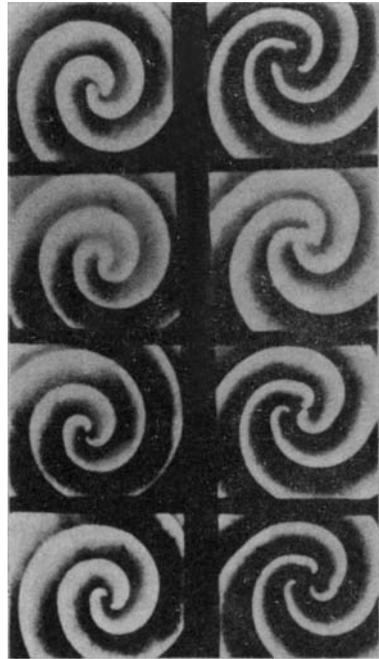


Рис. 1.34. Многорукавные спиральные волны в среде с реакцией Белоусова–Жаботинского. Интервалы между кадрами 15 с

Если приготовить такой раствор и предоставить его самому себе, в нем спонтанно возникают источники концентрически расходящихся волн — ведущие центры (рис. 1.32). Длительное время оставалось неясным, являются ли ведущие центры автономными источниками или же их наличие обусловлено присутствием в растворе посторонних включений (примесей, пузырьков газа), в окрестности которых элементы среды переходят в автоколебательный режим. Сегодня, по-видимому, можно уже считать твердо установленным, что все ведущие центры в реакции Белоусова–Жаботинского имеют внешнее происхождение. В эксперименте [134] на ведущий центр посылали периодическую последовательность волн с частотой выше его частоты генерации. В результате действие ведущего центра оказывалось подавленным. Однако стоило лишь прекратить подачу этой последовательности волн, как ведущий центр восстанавливался на прежнем месте.

В отличие от ведущих центров, спиральные волны в среде с реакцией Белоусова–Жаботинского не связаны с присутствием каких-либо посторонних включений, их обычно получают путем разрыва сложного фронта волны возбуждения. Все спиральные волны имеют одинаковую частоту. Поэтому, как видно из рис. 1.33, спиральные волны сосуществуют между собой, но гасят ведущий центр, являющийся более медленным автоволновым источником. В среде с реакцией Белоусова–Жаботинского [86] также наблюдались многорукавные спиральные волны (рис. 1.34; обратите внимание на нестационарность режима и «перезамыкание» волн в центральной области).

Приведенные примеры свидетельствуют, что спиральные волны представляют собой главный тип элементарных самоподдерживающихся структур в однородных возбудимых средах. Подобно вихрям в сверхпроводнике или в сверхтекучем гелии, они чрезвычайно устойчивы.

Расчет частоты вращения и формы спиральных волн — важная задача теории. Рассмотрим вначале распространение бегущего импульса по тонкому кольцу радиуса R . Если толщина кольца достаточно мала, задачу можно считать одномерной. Как отмечалось в разделе 1.4, ей отвечает то же решение, что и для периодической последовательности импульсов на бесконечной прямой с пространственным периодом $L = 2\pi R$. Скорость импульсов однозначно определялась периодом L и возрастала с увеличением L , стремясь к конечному пределу V_0 при $L \rightarrow \infty$.

Начнем увеличивать внешний радиус кольца и устремим его к бесконечности. В результате мы придем к задаче о волне возбуждения, вращающейся вокруг отверстия радиуса R . Заметим прежде всего, что в установившемся режиме фронт волны не может представлять тогда прямую линию, вращающуюся с угловой скоростью ω . Действительно, это означало бы, что на расстоянии r от центра отверстия скорость фронта равняется $V = \omega r$ и неограниченно возрастает с увеличением r . Но скорость фронта не может превысить значение V_0 . Следовательно, удаленные участки фронта отстают, а сам фронт скручен в спираль.

Пусть в установившемся режиме спираль имеет форму $\varphi = \omega t - \chi(r)$ (где $\chi(r)$ — некоторая функция r) и вращается с угловой скоростью ω . Рассмотрим точку A , удаленную на расстояние r от центра спирали O (рис. 1.35а). Если провести через точку A и O окружность, видно, что точка пересечения линии фронта с такой окружностью бежит по ней со скоростью $V_r = \omega r$. Смещение этой точки связано с прохождением через точку A (рис. 1.35б) участка фронта спиральной волны, имеющего скорость нормального смещения V , и поэтому скорость такого смещения равна

$$V_r = \frac{V}{\cos \alpha}, \quad (1.77)$$

где α — угол между нормалью к фронту и касательной к окружности в точке A . Несложный расчет показывает, что если линия фронта задается как $\varphi = \omega t - \chi(r)$ и в данный момент фронт проходит через точку A , то

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2 \chi_r^2}}, \quad (1.78)$$

где $\chi_r = d\chi/dr$. С учетом (1.77), (1.78) и равенства $V_r = \omega r$ находим

$$V = \frac{\omega}{\sqrt{\chi_r^2 + 1/r^2}}. \quad (1.79)$$

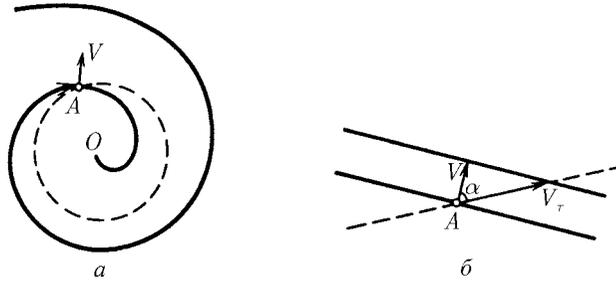


Рис. 1.35. К расчету формы спиральной волны

Предположим для простоты, что скорость нормального смещения всех участков фронта одинакова и равна скорости движения одиночной плоской волны возбуждения (одиночного импульса): $V = V_0$. Тогда (1.79) будет представлять собой уравнение, определяющее производную χ_r на различных удалениях r от центра волны при заданном значении ω .

Частоту вращения волны вокруг отверстия с радиусом R можно рассчитать исходя из следующих соображений. Поскольку отверстие непроницаемо, фронт волны подходит к нему под прямым углом, поэтому $\chi_r(R) = 0$. Полагая в (1.79) $r = R$, мы получаем с учетом этого граничного условия $V_0 = \omega R$. Следовательно, период $T = 2\pi/\omega$ спиральной волны равен времени одного оборота импульса, циркулирующего по окружности радиуса R : $T = 2\pi R/V_0$.

Учитывая этот результат, уравнение (1.79) можно переписать как

$$\chi_r^2 + \frac{1}{r^2} = \frac{1}{R^2}. \quad (1.80)$$

Функция $\chi(r)$, определяющая формулу спирали, вычисляется простым интегрированием:

$$\chi(r) = \int_R^r \sqrt{\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}} dr. \quad (1.81)$$

Таким образом, функция $\chi(r)$ монотонно возрастает с увеличением r , а следовательно, задаваемая ею в полярных координатах кривая $\varphi = \chi(r)$ является спиралью. Шаг этой спиральной волны $h_{св}$ можно найти из условия

$$\chi(r + h_{св}) - \chi(r) = 2\pi. \quad (1.82)$$

Вообще говоря, он зависит от расстояния r до ее центра. При больших удалениях

$$h_{св} \approx \frac{2\pi}{\chi_r(r)}. \quad (1.83)$$

Поскольку в этой области $\chi_r \approx 1/R$, мы видим, что вдали от центра шаг спирали постоянен и равен периметру отверстия: $h = 2\pi R$. Спираль с постоянным шагом называют *архимедовой*. Отметим также, что кривая, задаваемая в полярных координатах уравнением $\varphi = \chi(r)$ с функцией $\chi(r)$ вида (1.81), представляет собой *эвольвенту* отверстия радиуса R [38].

Итак, мы убедились, что вокруг отверстия в возбудимой среде может устойчиво циркулировать спиральная волна, и нашли в простейшем приближении ее форму и частоту циркуляции.

Проведенный расчет был неточным в двух отношениях. Во-первых, мы пренебрегли зависимостью скорости следования волн от интервала между ними. Этот недостаток нетрудно исправить. Поскольку угловая скорость вращения равна ω , в установившемся режиме вся картина полностью повторяется через промежутки времени $T = 2\pi/\omega$, а следовательно, интервал между прохождением двух последовательных волн через любую точку среды также равен T . Поэтому вместо скорости V_0 , отвечающей движению одиночного импульса, следует использовать скорость $V(T)$, которая характеризует движение последовательности импульсов с периодом T . Период T можно тогда найти, решив уравнение

$$V(T)T = 2\pi R. \quad (1.84)$$

Второе обстоятельство является более тонким, а его учет — не столь простым. Проведенное выше рассмотрение не принимало во внимание зависимость скорости движения фронта волны от его кривизны. Между тем, очевидно, что участки фронта, находящиеся на разном удалении от центра, имеют различную кривизну, а следовательно, различаются между собой и скорости их нормального смещения.

Кривизна линии, заданной в полярных координатах уравнением $\varphi = \chi(r)$, равна

$$K = \frac{r\chi_{rr} + 2\chi_r + r^2\chi_r^3}{\sqrt{(1 + r^2\chi_r^2)^3}}. \quad (1.85)$$

Из (1.80) следует, что для $\chi_{rr} = d\chi_r/dr$ справедливо выражение

$$\chi_{rr} = \frac{1}{r^2\chi_r}. \quad (1.86)$$

Поскольку волна подходит к отверстию под прямым углом, $\chi_r \rightarrow 0$ при $r \rightarrow R$ (мы уже использовали выше это условие). Но тогда, согласно (1.86), $\chi_{rr} \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow R$, а поэтому кривизна найденной нами линии, описывающей форму фронта спиральной волны, обращается в бесконечность (ср. (1.85)) при подходе к границе отверстия. Ясно, однако, что пренебрегать зависимостью скорости движения фронта волны от его кривизны, как мы поступали до настоящего времени, можно лишь, если эта кривизна K достаточно мала. Мы видим, что по крайней мере вблизи от границы отверстия это приближение заведомо не справедливо.

Забега вперёд, заметим, что при учете такой зависимости найденное нами решение подправляется лишь в пределах узкого слоя шириной порядка $(D^2 R/V_0^2)$, где D — коэффициент, характеризующий зависимость скорости фронта от его кривизны; вне этого узкого пограничного слоя спираль имеет форму эвольвенты отверстия. Для исправленного решения при приближении к границе отверстия кривизна фронта не возрастает до бесконечности, а стремится к конечному значению порядка $\sqrt[3]{V_0/DR^2}$.

Циркуляция волны вокруг отверстия в предположении о постоянстве скорости движения фронта рассмотрена в классической работе Н. Винера и А. Розенблюта [38]. Именно они обратили внимание на то, что фронт спирали представляет собой эвольвенту отверстия.

Как свидетельствуют приведенные выше примеры, волны наблюдаются и в отсутствие отверстия.

В однородной возбудимой среде при установившемся вращении спиральной волны концевая точка ее фронта совершает вращательное движение, перемещаясь вдоль окружности — границы ядра. Внутри ядра элементы среды сохраняют состояние покоя, хотя эта область по своим свойствам ничем не отличается от других участков возбудимой среды. Все это выглядит так, как будто ядро представляет собой некоторое *эффективное* отверстие. Главный вопрос, который в связи с этим возникает, — почему возбуждение не проникает внутрь ядра?

Ранее мы отмечали, что для каждой среды существует свой минимальный возможный период устойчивого следования импульсов L_{\min} . Это означает, что на окружностях с радиусом меньше $R_{\min} = L_{\min}/2\pi$ устойчивая циркуляция импульсов невозможна.

Возьмем отверстие, вокруг которого циркулирует волна, и будем уменьшать его радиус R . Что будет происходить, если сделать радиус отверстия меньше R_{\min} ? Ясно, что волна не может циркулировать вдоль такого малого отверстия, будучи «приклеенной» к нему. В действительности волна возбуждения оторвется от отверстия и у нее образуется свободный оборванный

конец. Минимальный возможный радиус окружности (т. е. границы ядра), вдоль которой способен устойчиво циркулировать конец волны, — это радиус R_{\min} . Такая спиральная волна будет намотана максимально плотно — шаг ее спирали вдаль от центра равен $h_{\text{св}} = L_{\min}$, т. е. она испускает самую частую из возможных последовательностей волн и имеет частоту циркуляции $\omega = \omega_{\max}$.

Полученная простая оценка частоты спиральной волны и радиуса ее ядра оказывается довольно близкой к действительности в случае хорошо возбудимых сред (ср. раздел 1.5); она дает для них период спиральной волны, заниженный в среднем лишь примерно в два раза по отношению к истинному. Причина такого расхождения понятна. При выводе этой оценки мы пренебрегли кривизной фронта спиральной волны — точнее, ее влиянием на скорость движения фронта волны. Между тем, участки спиральной волны, лежащие ближе всего к ядру, имеют большую кривизну и, следовательно, должны двигаться несколько медленнее одиночного импульса. В результате частота циркуляции спиральной волны уменьшается по сравнению со значением ω_{\max} .

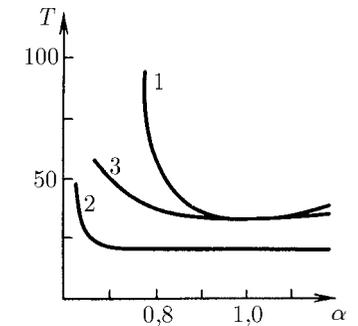


Рис. 1.36. Период одорукавной спиральной волны (кривые 1, 3) и минимальный возможный период следования импульсов (кривая 2) как функции параметра α , характеризующего возбудимость среды

Последовательный учет этого эффекта предпринят в [88, 207]; он позволяет получить достаточно хорошее согласие аналитических результатов с данными численного расчета. На рис. 1.36, взятом из [88], проведено сравнение величины $T_{\min} = 2\pi/\omega_{\max}$ (кривая 2) со значением периода циркуляции, полученным путем численного моделирования вращающейся спиральной волны в рамках полных, зависящих от времени уравнений возбудимой среды (кривая 1), а также с результатами приближенного аналитического расчета, учитывающего кривизну фронта распространяющихся волн (кривая 3). Мы видим, что согласие остается очень хорошим, пока период цир-

куляции спиральной волны не начинает резко возрастать по сравнению с T_{\min} .

Выше описан режим циркуляции спиральной волны, для которого характерны малый размер ядра (его радиус порядка R_{\min}) и малый период циркуляции порядка T_{\min} ; этот режим осуществляется в хорошо возбудимых средах. Если уменьшать возбудимость среды (что соответствует уменьшению параметра α на рис. 1.36), на смену ему постепенно приходит режим циркуляции с большим периодом ($T \gg T_{\min}$) и большим радиусом ядра ($R \gg R_{\min}$) спиральной волны. Описание таких спиральных волн и расчет их основных параметров требуют специального анализа, который проведен в разделе 1.7.

7. Кинематика автоволновых фронтов в возбудимых средах

Возбудимая среда нелинейна, и автоволны взаимодействуют друг с другом. При столкновении двух волн они аннигилируют; если же одна волна движется вслед другой, то она не ощущает идущую впереди волну, пока расстояние между ними значительно больше, чем ширина волны, т. е. величина порядка L_{\min} . Здесь мы ограничимся рассмотрением таких режимов, при которых каждая волна отделена от последующей расстоянием, гораздо большим L_{\min} . Тогда можно пренебречь шириной отдельной уединенной волны и считать, что она полностью задается ориентированной кривой своего фронта.

Поскольку состояния среды до и после прохождения импульса возбуждения совпадают, фронт автоволны может обрываться внутри среды, так что в ней волна имеет свободный конец (ср. раздел 1.5). Помимо смещения в нормальном направлении, на свободном конце волна может «прорасти» или сокращаться с течением времени. Скорость этого тангенциального смещения G зависит от кривизны K_0 фронта при подходе к точке обрыва. Пусть G_0 — скорость «прорастания» свободного конца плоской полуволны. Тогда при достаточно малых кривизнах K_0 скорость «прорастания» искривленной волны G можно рассчитать с помощью теории возмущений (см. приложение к [29]) и получить $G = G_0 - \gamma K_0$. Для интересующих нас возбудимых сред скорость «прорастания» уменьшается с ростом кривизны на свободном конце (т. е. $\gamma > 0$).

Как отмечалось в разделе 1.5, меняя возбудимость среды, можно управлять величиной G_0 и даже менять ее знак. При отрицательном значении G_0 свободный конец фронта сокращается и среда не допускает режимов в ви-

де спиральных волн. Поэтому мы предположим, что величина G_0 положительна, достаточно мала и линейная зависимость G от K сохраняется вплоть до значения кривизны на свободном конце $K_{\text{кр}} = G_0/\gamma$, при котором скорость «прорастания» обращается в нуль. Мы также считаем, что $DK_{\text{кр}} \ll V_0$. Эти два последних предположения существенно упрощают анализ благодаря появлению дополнительного малого параметра

$$\beta = \sqrt{\frac{DK_{\text{кр}}}{V_0}}. \quad (1.87)$$

Они выполняются, если возбудимость среды достаточно для существования спиральных волн, но все же не слишком высока.

Итак, в рамках кинематики математическое описание автоволн в двумерной возбудимой среде строится следующим образом. Будем характеризовать волну указанием только кривой ее фронта, для чего воспользуемся *натуральным уравнением* этой кривой $K = K(l)$. Оно устанавливает связь между длиной дуги l кривой (которую удобно отсчитывать от свободного конца фронта) и кривизной фронта K в соответствующей точке; как известно, натуральное уравнение задает кривую с точностью до ее расположения на плоскости. Если форма кривой меняется со временем, то $K = K(l, t)$.

Эволюция волны с течением времени определяется двумя условиями:

1. Каждый участок фронта смещается со временем по нормали к себе со скоростью

$$V = V_0 - DK. \quad (1.88)$$

2. Свободный конец волны сокращается ($G < 0$) или гладко «прорастает» в касательном направлении со скоростью

$$G = \gamma(K_{\text{кр}} - K_0), \quad (1.89)$$

где $K_0 = \lim_{l \rightarrow 0} K(l)$.

Сформулированных условий достаточно, чтобы получить уравнение, которому подчиняется функция $K(l, t)$. Его можно вывести, основываясь на методах дифференциальной геометрии [32]. Ниже мы изберем более простой способ, предложенный в [46].

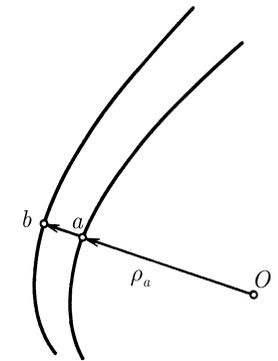


Рис. 1.37. К выводу уравнения (1.95)

Рассмотрим положение фронта волны в некоторый момент t . Пусть его кривизна в точке a была в этот момент K_a (рис. 1.37). Через промежуток времени dt малая окрестность точки a на фронте волны переместится в окрестность точки b , а кривизна в этой точке станет кривой K_b . Найдем связь между K_a и K_b .

Для этого удобно перейти в полярную систему координат с полюсом в центре кривизны малого участка фронта, лежащего в окрестности точки a . В этом случае справедливо соотношение

$$\rho_b = \rho_a + V dt, \quad (1.90)$$

где $\rho_a = 1/K_a$ — радиус кривизны фронта в точке a , а ρ_b — полярный радиус-вектор точки b . Кривизна кривой, описываемой в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, вычисляется по формуле

$$K = (\rho^2 - 2\rho' - \rho\rho'')(\rho^2 + \rho'^2)^{-3/2}. \quad (1.91)$$

Подставив (1.90) в выражение (1.91), получаем с точностью до членов первого порядка по dt :

$$K_b = K_a - VK_a^2 dt - K_a^2 \frac{d^2V}{d\varphi^2} dt \quad (1.92)$$

(мы учли здесь, что $\partial\rho_a/\partial\varphi = 0$). Перейдя в (1.92) к дифференцированию по длине дуги l ($dl = \rho_a d\varphi$), находим

$$K_b - K_a = dK = - \left(K_a^2 V + \frac{d^2V}{dl^2} \right) dt. \quad (1.93)$$

С другой стороны, $dK = (\partial K/\partial l) dl + (\partial K/\partial t) dt$. Для приращения длины дуги за время dt нетрудно получить выражение

$$dl = \left(\int_0^l KV d\xi \right) dt + G dt. \quad (1.94)$$

Первое слагаемое в (1.94) описывает увеличение длины дуги за счет изменения радиусов кривизны в каждой точке кривой; второму слагаемому отвечает изменение длины дуги за счет «прорастания» (или сокращения, если $G < 0$) фронта на своем свободном конце, который выбран за начало

отсчета l . Комбинируя два выражения для dK , приходим к уравнению

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \left(\int_0^l KV d\xi + G \right) \frac{\partial K}{\partial l} = -K^2 V - \frac{\partial^2 V}{\partial l^2}, \quad (1.95)$$

в котором скорость «прорастания» G зависит от кривизны $K(0, t) = \lim_{l \rightarrow 0} K(l, t)$ на свободном конце, а скорость нормального смещения фронта V однозначно определяется локальной кривизной этого фронта в соответствующей точке, т. е. $V = V(K(l, t))$. Таким образом, уравнение (1.95) однозначно определяет эволюцию фронта со свободным концом (обрывом волнового фронта).

В частности, если G, V даются выражением (1.88) и (1.89), уравнение (1.95) приобретает вид

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \left[\int_0^b KV_0 d\xi + \gamma(K_{\text{кр}} - K(0, t)) \right] \frac{\partial K}{\partial l} = -K^2 V_0 + D \frac{\partial^2 K}{\partial l^2} \quad (1.96)$$

— основного уравнения кинематики волновых фронтов в возбудимых средах. Мы учли здесь, что поправка к скорости нормального смещения $V = V_0 - DK$ при значениях кривизны $K \lesssim K_{\text{кр}}$ мала согласно сделанному нами выше предположению, а поэтому заменили V на V_0 всюду в (1.96), кроме последнего слагаемого, где это привело бы к отбрасыванию члена со старшей производной — вскоре мы увидим, что этот член играет весьма важную роль.

Уравнение (1.96) имеет тривиальное стационарное решение $K(l, t) \equiv 0$ при $l \geq 0$, которое отвечает плоскому фронту с обрывом, смещающемуся вперед со скоростью V_0 . Однако это решение абсолютно неустойчиво по отношению к малым возмущениям. Численные расчеты для уравнения (1.96) показывают (рис. 1.38), что независимо от характера начального возмущения из плоской полуволны со свободным концом всегда рождается вращающаяся вокруг некоторого центра с постоянной угловой скоростью спиральная волна. Основные характеристики установившейся стационарной циркуляции спиральных волн можно рассчитать аналитически, непосредственно исходя из (1.96).

При стационарной циркуляции форма волнового фронта постоянна, меняется со временем лишь положение кривой на плоскости. Поэтому зависимость K от t отсутствует. Кроме того, стационарная циркуляция возможна, лишь если свободный конец волны, совершающий равномерное круговое

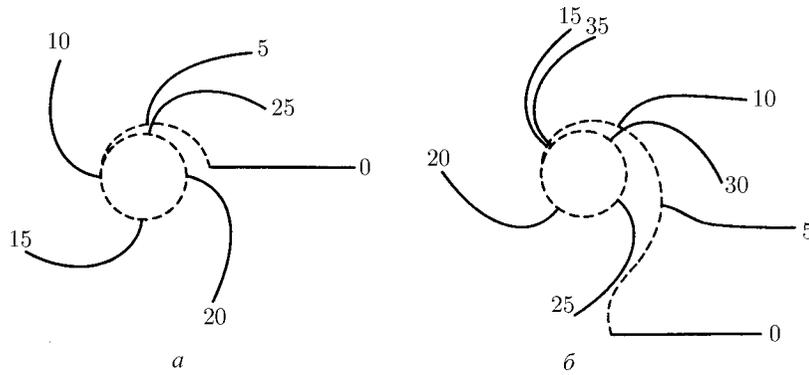


Рис. 1.38. Формирование спиральной волны (данные численного расчета) из плоской полуволны с двумя различными малыми начальными возмущениями (*a* и *b*)

движение вокруг центра, не «прорастает» и не сокращается со временем. Это означает, что кривизна его фронта должна быть равной критической, т. е. $K(0) = K_{кр}$. Круг, по границе которого движется свободный конец волны, представляет собой ее ядро; фронт спиральной волны подходит к ядру по нормали.

Заметим, что с помощью уравнения (1.96) можно описать также стационарную циркуляцию спиральной волны вокруг круглого отверстия в возбудимой среде. Если граница отверстия непроницаема и диффузионный поток через нее равен нулю, фронт ортогонален к границе. Форма фронта тогда определяется стационарным пределом уравнения (1.96) в отсутствие слагаемого, которое описывало бы «прорастание» свободного конца (поскольку такого свободного конца уже нет).

При стационарной циркуляции, когда $\partial K/\partial t = 0$, уравнение (1.96) можно один раз проинтегрировать, получив

$$K \int_0^l K V_0 d\xi - D \frac{dK}{dl} = \omega. \quad (1.97)$$

Постоянная интегрирования ω равна частоте вращения спиральной волны. Это легко понять, учтя, что фронт подходит к ядру (или отверстию) по нормали, и поэтому $dV/dl = -DdK/dl$ при $l = 0$ есть угловая скорость.

Рассмотрим, какой результат был бы получен в модели, где скорость V вообще не зависит от кривизны, т. е. $D = 0$, и второе слагаемое слева

в уравнении (1.97) отсутствует. Нетрудно заметить, что в этом случае (1.97) имеет решение

$$K = \sqrt{\frac{\omega}{2lV_0}}. \quad (1.98)$$

Пусть в среде вырезано отверстие с радиусом R . Тогда частота циркуляции спиральной волны вокруг отверстия равна $\omega = V_0/R$ и из решения (1.98) следует

$$K = \sqrt{\frac{1}{2Rl}}. \quad (1.99)$$

Можно проверить, что кривая, определяемая данным натуральным уравнением, есть эвольвента круга с радиусом R . При $l \gg R$ она представляет собой спираль с постоянным шагом $h = 2\pi R$, т. е. архимедову спираль. Таким образом, для модели, где $V \equiv V_0$, мы воспроизвели основные результаты, полученные в разделе 1.6.

Заметим, что при $l \rightarrow 0$ найденное выше решение даст $K \rightarrow \infty$. Это означает, что если коэффициент D в зависимости $V = V_0 - DK$ мал, но все же отличен от нуля, зависимостью скорости от кривизны нельзя пренебрегать при достаточно малых l , т. е. вблизи границы ядра (или отверстия).

Рассмотрим теперь задачу о расчете параметров спиральной волны в отсутствие отверстия с учетом зависимости скорости фронта от его кривизны. Частота вращения спиральной волны $\omega = \omega_0$, входящая в качестве неизвестного параметра в (1.97), определяется в этом случае из следующих соображений. Вдали от центра спирали кривизна ее фронта должна стремиться к нулю, т. е. $K \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Можно показать, что это условие уже однозначно определяет фазовую траекторию для дифференциального уравнения (1.97) при заданном значении ω . В том числе оказывается однозначно определенным и значение кривизны $K(0)$ при $l = 0$, т. е. на свободном конце волны, подходящем к ядру спирали. Потребовав теперь, чтобы $K(0) = K_{кр}$, получим уравнение для нахождения частоты ω_0 .

При достаточно больших значениях l можно пренебречь слагаемым с производной в левой части уравнения (1.97). В этой области решение дается формулой (1.98). Из уравнения (1.97) вытекает также, что при $l = \infty$ производная равна $dK/dl = -\omega/D$. Поэтому при малых l натуральное уравнение интересующей нас кривой есть

$$K = K_{кр} - \frac{\omega}{D}l. \quad (1.100)$$

Выражения (1.98) и (1.100) представляют собой внешнюю и внутреннюю аппроксимации для единой фазовой траектории, а поэтому они долж-

ны «сшиваться» между собой. Потребуем, чтобы в некоторой точке $l = l_0$ совпадали как значения двух функций, так и их первые производные. Эти условия дают два уравнения:

$$K_{\text{кр}} - \frac{\omega}{D} l_0 = \sqrt{\frac{\omega}{2V_0 l_0}}, \quad (1.101)$$

$$\frac{\omega}{D} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega}{2V_0}} \sqrt{\frac{1}{l_0^3}}. \quad (1.102)$$

Их решения имеют вид

$$\omega_0 = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \sqrt{DV_0} \sqrt{K_{\text{кр}}^3}, \quad (1.103)$$

$$l_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{D}{K_{\text{кр}} V_0}}. \quad (1.104)$$

Приведенный выше приближенный расчет, основанный на сшивке внутреннего и внешнего решений, является довольно очевидным подходом при решении уравнения (1.97) с малым параметром при старшей производной. Оказывается, однако, что для данного конкретного уравнения можно найти также и точное решение, а именно: переходя к новым переменным, уравнение (1.97) удается полностью обезразмерить, а затем проинтегрировать на ЭВМ. В результате мы получаем

$$\omega_0 = \zeta \sqrt{DV_0} \sqrt{K_{\text{кр}}^3}, \quad \zeta \approx 0,69 \dots, \quad (1.105)$$

что отличается от (1.103) лишь более точным значением числового коэффициента.

С точностью до членов порядка $DK_{\text{кр}}/V_0$ радиус ядра спиральной волны вычисляется из условия $\omega_0 R_0 = V_0$:

$$R_0 = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\frac{V_0}{D}} \sqrt{\frac{1}{K_{\text{кр}}^3}}. \quad (1.106)$$

Обсудим полученные результаты. Как видно, при $K_{\text{кр}} \rightarrow 0$ частота вращения спиральной волны ω_0 убывает и стремится к нулю; при этом радиус R_0 ядра спиральной волны неограниченно возрастает. Всюду, кроме узкого пограничного слоя ширины порядка l_0 вблизи границы ядра, фронт

спирали имеет вид эвольвенты окружности радиуса R_0 и дается выражением (1.99) при $R = R_0$. Ширина погранслоя l_0 мала по сравнению с радиусом ядра: $l_0/R_0 \sim (DK_{\text{кр}}/V_0) \ll 1$.

Совершенно аналогично можно найти решение для спиральной волны, вращающейся вокруг отверстия. К отверстию с радиусом $R \gg D/V_0$ фронт волны подходит с кривизной

$$K(0) = \sqrt[3]{\frac{1}{\zeta^2}} \sqrt[3]{\frac{V_0}{DR^2}}. \quad (1.107)$$

Вне узкого погранслоя шириной порядка $D^2 R/V_0^2$ спираль имеет форму эвольвенты отверстия. С точностью до членов порядка $\sqrt[3]{(D/V_0 R)^2}$ частота вращения ω определяется из условия $\omega R = V_0$.

Заметим, что конец спиральной волны, движущейся вдоль непроницаемой для диффузии границы отверстия, нельзя считать свободным. Его кривизна может превышать значение критической кривизны $K_{\text{кр}}$ для свободного конца волны, но должна оставаться меньше значения критической кривизны K^* для распространяющегося сплошного фронта (см. выражение (1.71) и рис. 1.19). Это обуславливает эффект гистерезиса, наблюдавшийся в численном эксперименте [227].

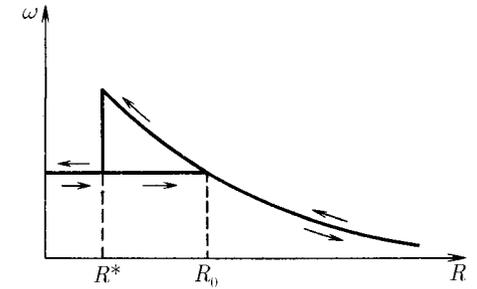


Рис. 1.39. Зависимость частоты вращения спиральной волны от радиуса отверстия

В некотором интервале значений радиуса отверстия ($R^* < R < R_0$) могут осуществляться два режима циркуляции спиральной волны, отличающихся частотой вращения (рис. 1.39). При первом режиме конец волны движется вдоль границы отверстия (волна как бы «приклеена» к отверстию), а при втором — свободным и движется вокруг ядра с радиусом R_0 , так что спиральная волна не ощущает отверстия, расположенного в ее центре. Если вначале создать в среде достаточно большое

отверстие с радиусом $R > R_0$ и затем плавно уменьшать его, то спиральная волна будет оставаться «приклеенной» к отверстию вплоть до $R = R^*$, после чего конец волны отходит от отверстия, частота вращения скачком понижается и остается при $R \leq R^*$ равной частоте вращения спиральной волны в однородной среде (1.105). При движении в обратном направлении, т. е. при плавном увеличении R от нуля вплоть до $R = R_0$, сохраняется режим с «отклеившимся» концом волны, и лишь при $R > R_0$ конец спиральной волны подходит к границе отверстия.

В рамках использованной нами кинематической модели предполагалось, что скорость нормального смещения V зависит только от локальной кривизны данного участка волнового фронта, т. е. $V = V(K)$. Вообще говоря [32], для участков, близких к свободному концу, скорость V может также явно зависеть от расстояния до точки обрыва (т. е. от длины дуги l): $V = V(K, l)$. При такой дополнительной зависимости основные характеристики спиральных волн рассчитаны в [32]. Этот эффект, однако, не дает существенных различий, и мы его подробно не обсуждаем.

Подчеркнем, что все найденные здесь для спиральных волн результаты применимы лишь в том случае, если полученное значение радиуса R_0 ядра спиральной волны велико по сравнению с $R_{\min} = L_{\min}/2\pi$ (см. раздел 1.4), т. е. когда периметр ядра велик по сравнению с шириной отдельного импульса и фронт волны при своем движении не наталкивается на свой же «хвост».

8. Резонанс и дрейф спиральных волн

Основное уравнение кинематики волновых фронтов (1.96) можно использовать также для описания различных нестационарных режимов в определенных возбудимых средах.

Рассмотрим вначале процесс установления стационарной циркуляции спиральной волны в однородной среде. Допустим, что мы внесли малое локальное возмущение в форму фронта спиральной волны, локализованное на удалении l от свободного конца. Как следует из (1.96), оно будет с течением времени удаляться от центра волны на периферию, одновременно расплываясь и затухая по диффузионному закону с коэффициентом «диффузии» D . Согласно (1.96) скорость этого сноса вблизи от свободного конца, где $K \approx K_{\text{кр}}$, можно приближенно оценить как $K_{\text{кр}}V_0l$.

Итак, локализованное на удалении l возмущение смещается со скоростью порядка $K_{\text{кр}}V_0l$, а его ширина растет как \sqrt{Dt} (рис. 1.40). Можно поставить вопрос: на каком удалении должно быть первоначально локализовано возмущение, чтобы, несмотря на сносное движение, оно могло достиг-

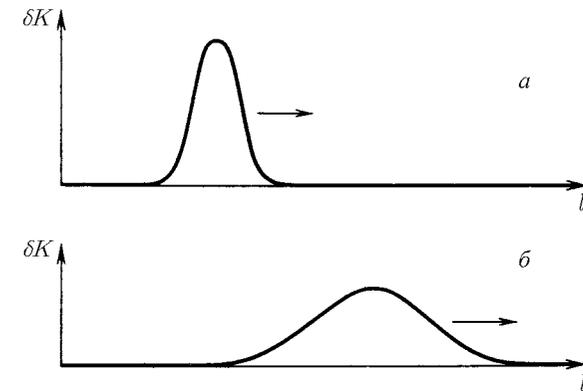


Рис. 1.40. Начальное возмущение формы спиральной волны (а) и его вид в последующий момент времени (б)

нуть свободного конца волны? Для этого необходимо, чтобы на протяжении некоторого интервала времени ширина расплывающегося возмущения (диффузионная длина) $L_{\text{диф}} \approx \sqrt{Dt}$ превышала удаление его центра от свободного конца волны $L_{\text{ц}} \approx l + K_{\text{кр}}V_0t$. Сравнение двух этих выражений показывает, что $L_{\text{диф}}$ может превысить $L_{\text{ц}}$ на определенном интервале времени, лишь если начальное удаление l не превышает величины порядка $\sqrt{D/K_{\text{кр}}V_0}$. Но, согласно (1.104), именно такова ширина погранслоя l_0 вблизи границы ядра!

Следовательно, оказать влияние на движение свободного конца волны могут лишь те возмущения фронта, которые возникают в пределах узкого погранслоя, на удалении не более l_0 от свободного конца. Эти возмущения формы фронта затухают за время

$$\tau_D \sim \frac{l_0^2}{D} \sim \frac{1}{K_{\text{кр}}V_0}. \quad (1.108)$$

Заметим, что характерное время релаксации возмущения формы фронта τ_D спиральной волны всегда мало по сравнению с ее периодом циркуляции. Действительно, из (1.105) и (1.108) следует, что

$$\omega_0\tau_D \sim \sqrt{\frac{DK_{\text{кр}}}{V_0}} \ll 1. \quad (1.109)$$

Кроме τ_D , существует еще одно характерное время τ_G , связанное с эффектами «прорастания» свободного конца волны.

Если бы коэффициент γ в выражении (1.89) для скорости прорастания G равнялся нулю, величина $K_{кр}$ вообще не входила бы в основное уравнение кинематики (1.96). В этом случае имелось бы не одно, а много различных решений для спиральных волн, отличающихся значением кривизны фронта $K(0)$ при подходе к свободному концу. Каждое из таких решений описывало бы некоторую спиральную волну, стационарно циркулирующую с частотой ω_0 , которая определялась бы по-прежнему формулой (1.105) с заменой $K_{кр}$ на $K(0)$. Тогда внешнее воздействие, внесшее локальное возмущение в форму фронта в пределах погранслоя, могло бы вызвать переход к новому режиму циркуляции со значением кривизны фронта на свободном конце, отличающимся от прежнего на некоторую малую величину $\delta K(0)$.

Если коэффициент γ отличен от нуля и положителен, все отклонения кривизны $K(0)$ от значения $K_{кр}$ затухают со временем. Если γ достаточно мала, то соответствующее время релаксации велико ($\tau_G \gg \tau_D$) и осуществляется квазистационарный режим. В этом режиме форма фронта у ядра адиабатически подстраивается к мгновенному значению кривизны $K(0, t)$ на свободном конце волны, а эта кривизна, в свою очередь, медленно меняется из-за «прорастания» или сокращения согласно уравнению

$$\left(\frac{\partial K}{\partial t}\right)_{l=0} = -G\left(\frac{\partial K}{\partial l}\right)_{l=0}. \quad (1.110)$$

Производная $(\partial K/\partial l)_{l=0}$ определяется равенством

$$\left(\frac{\partial V}{\partial l}\right)_{l=0} = -D\left(\frac{\partial K}{\partial l}\right)_{l=0} = \omega, \quad (1.111)$$

в котором ω находится из (1.105) с заменой $K_{кр}$ на $K(0, t)$.

С учетом сделанных замечаний при квазистационарном режиме кривизна на свободном конце $K_0 \equiv K(0, t)$ меняется со временем, подчиняясь следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{dK_0}{dt} = -\zeta\gamma\sqrt{\frac{V_0}{D}}\sqrt{K_0^3(K_0 - K_{кр})}. \quad (1.112)$$

Для малых возмущений $\delta K_0 = K_0 - K_{кр}$ уравнение (1.112) линеаризуется и приобретает форму

$$\frac{d(\delta K_0)}{dt} = -\frac{\delta K_0}{\tau_G}, \quad (1.113)$$

где характерное время релаксации

$$\tau_G = \frac{D}{\gamma\omega_0}. \quad (1.114)$$

Заметим, что $\omega\tau_G = D/\gamma$, а поэтому, согласно (1.109), условие применимости квазистационарного приближения $\tau_D \ll \tau_G$ имеет вид

$$\frac{\gamma}{D} \ll \sqrt{\frac{V_0}{DK_{кр}}}. \quad (1.115)$$

По оценкам для известных возбудимых сред, коэффициент γ варьируется от нуля до значения порядка D . Поэтому, поскольку $\sqrt{DK_{кр}/V_0} \ll 1$, условие (1.115) почти всегда выполнено и квазистационарное приближение справедливо.

Если $\gamma \ll D$, то $\omega_0\tau_G \gg 1$ и подстройка кривизны фронта вблизи ядра к значению $K_{кр}$, а следовательно, окончательное установление стационарного режима циркуляции, занимают много оборотов волны. Можно сказать, что в таких возбудимых средах спиральная волна обладает *высокой* инерционностью. При выполнении обратного неравенства $\gamma \gg D$ установление стационарной циркуляции происходит за время, малое по сравнению с длительностью одного оборота, и спиральная волна имеет *низкую* инерционность.

При выводе основного уравнения кинематики (1.96) мы отмечали, что натуральное уравнение кривой $K = K(l, t)$ задает только ее форму, но не положение на плоскости. Чтобы полностью описать эволюцию волнового фронта, необходимо располагать дополнительными уравнениями, которые определяли бы изменение со временем ориентации этой кривой и движение ее начальной точки.

Введем на плоскости декартову систему координат (x, y) . Пусть $X_0(t)$ и $Y_0(t)$ — координаты свободного конца волны в момент времени t , а $\alpha_0(t)$ — угол между касательной к фронту в его концевой точке и осью x (рис. 1.41). Легко убедиться, что задание величин X_0 , Y_0 и α_0 полностью фиксирует положение фронта на плоскости.

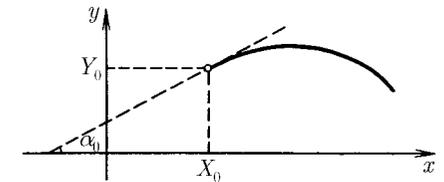


Рис. 1.41. К определению величин X_0 , Y_0 и α_0

Поскольку концевая точка смещается по нормали к фронту со скоростью $V(0) = V_0 - DK_0$ и смещается в тангенциальном направлении из-за «прорастания» или сокращения фронта со скоростью G , изменение ее декартовых координат со временем описывается уравнениями

$$\dot{X}_0 = -V(0) \sin \alpha_0 - G \cos \alpha_0, \quad \dot{Y}_0 = V(0) \cos \alpha_0 - G \sin \alpha_0. \quad (1.116)$$

При этом изменение со временем угла α_0 , характеризующего направление касательной к фронту в концевой точке, подчиняется уравнению

$$\dot{\alpha}_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial l} \right)_{l=0} + GK_0, \quad (1.117)$$

или, с учетом $V = V_0 - DK$,

$$\dot{\alpha}_0 = -D \left(\frac{\partial K}{\partial l} \right)_{l=0} + GK_0. \quad (1.118)$$

В сочетании с (1.96) уравнения (1.116) и (1.118) полностью описывают движение по плоскости волнового фронта со свободным концом.

Особенно простой вид закон движения концевой точки приобретает в квазистационарном приближении, когда можно отделить эффекты «прорастания» от эффектов установления фронта спиральной волны вблизи ядра. В этом случае $(\partial K / \partial l)_{l=0} \approx -\omega / D$, где ω находится из (1.105) с заменой $K_{кр}$ на K_0 , и теперь вместо уравнения (1.118) имеем

$$\dot{\alpha} = \zeta \sqrt{V_0 D} \sqrt{K_0^3 + \gamma K_0 (K_{кр} - K_0)}. \quad (1.119)$$

Таким образом, при выполнении условия (1.115) для расчета движения концевой точки спиральной волны достаточно решить четыре обыкновенных дифференциальных уравнения (1.112), (1.116) и (1.119).

Варьируя параметры среды, можно менять ее возбудимость и, следовательно, величину $K_{кр}$. Пусть эта величина периодически меняется со временем как

$$K_{кр}(t) = K_{кр} + K_1 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (1.120)$$

где K_1 — амплитуда модуляции, причем $K_1 \ll K_{кр}$, а частота модуляции ω_1 близка к собственной частоте ω_0 спиральной волны. Тогда, как было показано в [30], должен наблюдаться *резонансный эффект*, заключающийся в следующем. Оказывается, что при наличии модуляции $K_{кр}$ центр вращения спиральной волны уже не покоится, а движется с течением времени

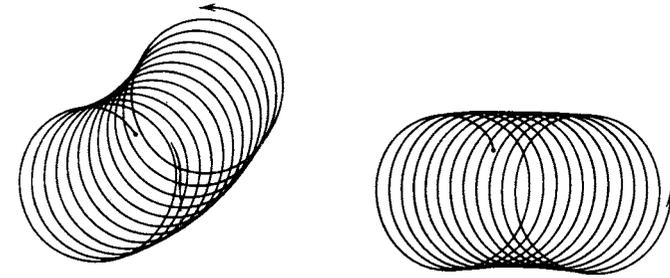


Рис. 1.42. Траектория движения кончика спиральной волны при двух различных отношениях между частотой модуляции и собственной частотой спиральной волны (численный расчет В. С. Зыкова)

по окружности (рис. 1.42), радиус $R_{рез}$ которой задается выражением

$$R_{рез} = \frac{3}{4} V_0 \frac{K_1}{K_{кр}} \frac{1}{|\omega - \omega_0|} \frac{1}{\sqrt{1 + (D/\gamma)^2}}; \quad (1.121)$$

он тем больше, чем ближе ω_1 к собственной частоте ω_0 . Скорость смещения центра

$$V_{рез} = \frac{3}{4} V_0 \frac{K_1}{K_{кр}} \frac{1}{\sqrt{1 + (D/\gamma)^2}} \quad (1.122)$$

пропорциональна амплитуде модуляции K_1 .

При точном совпадении частот, т. е. при *полном резонансе*, когда $\omega_1 = \omega_0$, центр фронта спиральной волны смещается с постоянной скоростью (1.122) вдоль прямой. Направление движения центра определяется начальной фазой модуляции φ и направлением вращения спиральной волны (по или против часовой стрелки).

Резонанс спиральных волн наблюдается в эксперименте [2] с использованием светочувствительной модификации реакции Белоусова – Жаботинского, катализатором в которой являлось соединение рутения. В среде первоначально создавали спиральную волну или пару таких волн. Затем, после измерения периода установившегося вращения спиральной волны, раствор начинали периодически однородно освещать с помощью интенсивного источника. Через равные интервалы времени производилось фотографирование волновой картины на фоне неподвижных реперных линий.

На рис. 1.43 показаны последовательные фотографии спиральной волны с интервалом времени 10 мин в условиях полного резонанса (частота

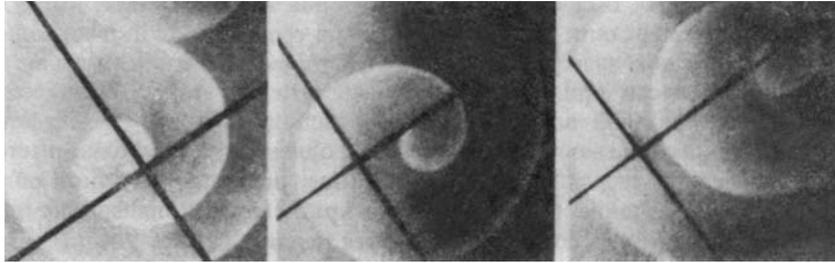


Рис. 1.43. Резонанс спиральной волны в химической возбудимой среде со светочувствительной реакцией Белоусова – Жаботинского

модуляции выбрана равной собственной частоте вращения волны). Видно, что центр вращения с постоянной скоростью смещается с течением времени вдоль одной из реперных линий; суммарное смещение составляет 2 см.

Если в среде имеются две спиральные волны с противоположными направлениями вращения, то, подбирая начальную фазу модуляции, можно добиться движения центров двух волн навстречу друг другу и их аннигиляции.

Перейдем теперь к рассмотрению явления *дрейфа* спиральной волны в неоднородной возбудимой среде [30]. Пусть критическая кривизна плавно меняется вдоль оси x , так что изменение $K_{кр}$ на расстоянии, равном размеру ядра R_0 , мало:

$$\left| \frac{\partial K_{кр}}{\partial x} \right| \ll \frac{K_{кр}}{R_0}. \quad (1.123)$$

При движении в неоднородной среде свободный конец спиральной волны последовательно проходит через области с различными значениями $K_{кр}$. Поэтому свободный конец движется так, как если бы критическая кривизна менялась со временем:

$$K_{кр}(t) = K_{кр}(X_0 + R_0 \cos \omega_0 t) \approx \bar{K}_{кр} + b_{кр} R_0 \cos \omega_0 t, \quad (1.124)$$

где X_0 — положение центра спиральной волны на оси,

$$\bar{K}_{кр} = K_{кр}(X_0), \quad b_{кр} = \left(\frac{\partial K_{кр}}{\partial x} \right)_{x=X_0}.$$

Следовательно, задача о дрейфе сводится к задаче о резонансе спиральной волны при точном совпадении частот. С течением времени центр

спиральной волны медленно смещается по прямой линии под некоторым направлением ϑ по отношению к оси x . Скорость дрейфа равна

$$V_d = \frac{(3/4)V_0}{\sqrt{1 + (D/\gamma)^2}} \frac{R_0}{K_{кр}} \left| \frac{\partial K_{кр}}{\partial x} \right|, \quad (1.125)$$

а тангенс угла дрейфа дается выражением

$$\operatorname{tg} \vartheta \approx -\frac{\gamma}{D}. \quad (1.126)$$

При высокой инерционности ($\gamma/D \ll 1$) спиральная волна смещается вдоль оси в направлении, обратном направлению увеличения $K_{кр}$. Если инерционность мала ($\gamma/D \gg 1$), дрейф осуществляется вдоль оси y , при этом его направление меняется на обратное при изменении направления вращения спиральной волны.

В заключение заметим, что дрейф спиральной волны не может продолжаться очень долго. В среде конечных размеров волна исчезает, когда ее ядро попадает на границу. Для неограниченной среды при движении волны в сторону меньших значений $K_{кр}$ радиус ее ядра растет: формально он равен бесконечности при $K_{кр} = 0$. При достижении этой области решение в виде спиральной волны теряется — свободный конец сокращается и уходит на бесконечность. Этот эффект, однако, уже не описывается простой линейной теорией, построенной выше, поскольку в такой области нарушается условие (1.123) и вариация критической кривизны на протяжении одного оборота спирали не является малой.

9. Автоволновые структуры в трехмерных возбудимых средах

Если взять на плоскости вращающуюся спиральную волну и продолжить ее прямо вверх, мы получим трехмерную автоволновую структуру — *простой вихрь*, имеющий вид вращающегося свитка (рис. 1.44). По своим свойствам такой вихрь аналогичен спиральной волне. В двумерном случае спиральная волна вращается вокруг некоторой точки; в трехмерном случае центры вращения образуют линию — ось вращения, называемую нитью вихря. Не всегда нить вихря — прямая линия. Она может быть искривлена или замкнута в окружность (рис. 1.45). В результате вихрь превращается в вихревое кольцо (рис. 1.46). Вихревое кольцо — это локальный автоволновой источник. На больших расстояниях от центра этот источник создает ту же картину расходящихся сферических волн, как и пейсмейкер.

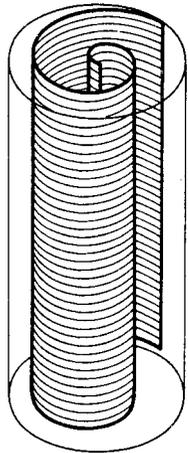


Рис. 1.44. Простой вихрь

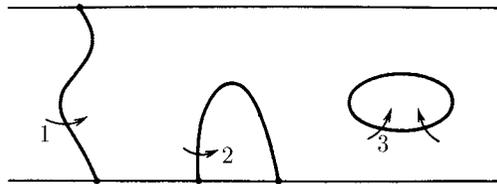


Рис. 1.45. Различные деформации нити вихря; стрелками указано направление вращения

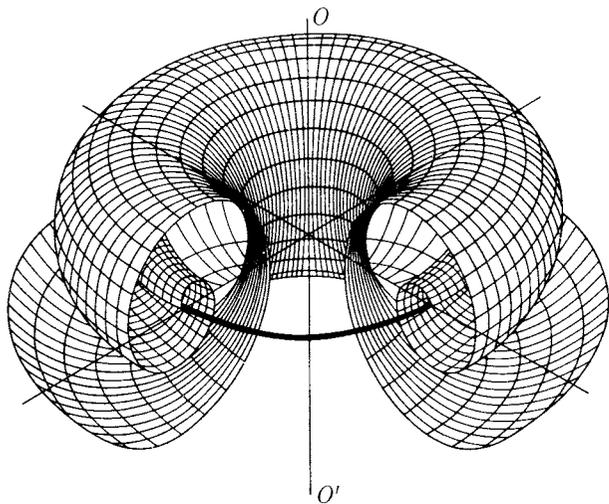


Рис. 1.46. Вихревое кольцо

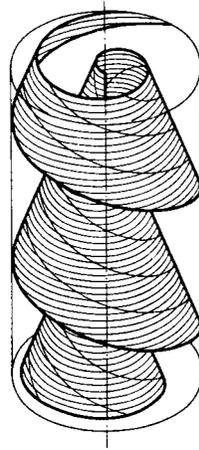


Рис. 1.47. Скрученный вихрь

Вихри и вихревые кольца представляют простейшие примеры автоволновых источников в трехмерных средах. Существуют и гораздо более сложные структуры. Так, если взять простую волну-свиток и скрутить ее вдоль вертикальной оси, мы получим объект, называемый *скрученным вихрем* (рис. 1.47). Пересекаясь с поверхностью воображаемого цилиндра, который охватывает нить такого вихря, волны возбуждения образуют винтовую линию. При замыкании нити скрученного вихря в окружность возникает объект, который естественно назвать *скрученным вихревым кольцом*. Продолжая такие построения, можно получить сложные структуры в виде зацепленных или завязанных узлом вихревых колец и т. п.

Существуют определенные топологические ограничения [267–270], которые значительно сокращают число допустимых трехмерных структур. Оказывается, что запрещено существование двух зацепленных простых вихревых колец или же одиночного скрученного вихревого кольца. Покажем, каким образом возникают такие топологические ограничения. Вспомним прежде всего, что если нить простого вихря окружить замкнутым контуром, то при обходе по такому замкнутому контуру фаза получит приращение, равное $2\pi N$, где N — число рукавов вихря. При обходе вдоль любого контура, не охватывающего нить, приращение фазы равно нулю.

Теперь нетрудно увидеть, что скрученное вихревое кольцо обязательно проткнуто нитью еще одного вихря. Окружим замкнутым контуром ось симметрии скрученного M раз вихревого кольца (величину M называют *полным кручением*). При обходе вдоль такого контура фаза получает приращение $2\pi M$. Следовательно, через такой контур проходит нить вихря с M рукавами или несколько вихревых нитей с суммарным топологическим зарядом ⁶ M .

Помимо описанных выше существуют многорукавные скрученные вихри, которые получаются путем скручивания вдоль оси многорукавных прямых вихрей. Если свернуть нить скрученного многорукавного вихря в окружность, мы приходим к многорукавному вихревому кольцу. Заметим, что полное кручение многорукавного вихревого кольца может принимать дробные значения: поскольку разрешено склеивать один рукав вихря с другим, кручение принимает значения $M = m/N$, где m — целое число.

Изменение фазы при обходе вдоль контура, охватывающего вертикальную ось кольца, равно NM . Повторяя предыдущие рассуждения, можно

⁶Понятие топологического заряда простого вихря предложено в [60]. Топологический заряд спиральной волны в двумерной среде равен деленному на 2π изменению фазы при обходе по направлению часовой стрелки вдоль замкнутого контура, окружающего ядро спиральной волны. Для спиральных волн, вращающихся в противоположных направлениях, знак топологического заряда будет обратным.

убедиться, что через центр такого кольца должен проходить вихрь с NM рукавами (или несколько вихрей с суммарным топологическим зарядом NM).

Нить вихря, проходящего через центр скрученного вихревого кольца, можно саму замкнуть в кольцо. В результате будет получена пара скрученных вихревых колец, зацепленных одно за другое.

Число рукавов и кручение двух вихревых колец не произвольны; они связаны определенным соотношением. Пусть N_1 — число рукавов, а M_1 — кручение первого кольца. Тогда, как следует из предыдущих рассуждений, число рукавов в втором кольце должно равняться $N_2 = N_1 M_1$. Аналогично для числа рукавов в первом кольце получаем $N_1 = N_2 M_2$, где M_2 — кручение второго кольца. Нетрудно видеть, что два равенства могут одновременно выполняться, лишь если

$$M_1 M_2 = 1, \quad \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}. \quad (1.127)$$

Согласно этим соотношениям, если одно из колец перекручено целое число раз M больше единицы, то второе кольцо скручено лишь на $1/M$ оборотов. При этом число рукавов у второго кольца в M раз больше, чем у первого.

Соотношения (1.127) накладывают жесткие ограничения на допустимые кольцевые зацепления. Из них следует, например, что нельзя продеть сквозь друг друга два простых (нескрученных) вихревых кольца или два однорукавных вихревых кольца, каждое из которых перекручено дважды.

Вихревые нити можно не только замыкать в кольцо, но и завязывать их в узлы. Возникающие при этом объекты очень сложны. Их классификация и отбор разрешенных узлов требуют применения топологических методов [269].

К настоящему времени вихри в трехмерных активных средах наблюдались при реакции Белоусова–Жаботинского [257] и в численных экспериментах [113, 114].

Численные результаты свидетельствуют, что вихревые кольца обычно неустойчивы. Как правило, они медленно сжимаются со скоростью, обратно пропорциональной радиусу кольца, и в конце концов исчезают. В некоторых случаях, однако, наблюдается не сжатие, а раздувание кольца: его радиус растет и оно превращается в ограниченной среде в прямой вращающийся свиток.

Подобно спиральным волнам, в зависимости от значений параметров, характеризующих возбудимость среды, вихревые кольца могут быть рыхлыми или «плотными». В последнем случае испускаемые кольцом волны

следуют с периодом, близким к T_{\min} , так что фронт следующей волны на движется на хвост предыдущей.

Ниже мы кратко изложим методы теоретического описания рыхлых трехмерных автоволновых структур, основывающихся на кинематике фронтальных поверхностей [29].

Кинематическое описание, развитое для двумерных возбудимых сред, допускает естественное обобщение на трехмерный случай. Как и прежде, будем считать, что волна полностью описывается путем задания ее ориентированной поверхности фронта. Всякая поверхность в трехмерном пространстве обладает в каждой точке двумя главными радиусами кривизны: R_1 и R_2 . Можно сказать, что при малых кривизнах скорость нормального смещения участка фронтальной поверхности зависит лишь от суммы двух главных кривизн, т. е. от удвоенной средней кривизны $2H = 1/R_1 + 1/R_2$, согласно формуле

$$V = V_0 - 2DH. \quad (1.128)$$

На линии своего обрыва фронтальная поверхность может «прорасти» или сократиться. Скорость тангенциального смещения (скорость «прорастания» искривленной волны) G следующим образом зависит от средней кривизны H фронта при подходе к обрыву в данной точке и от тангенциальной (или геодезической) кривизны κ линии обрыва:

$$G = -\gamma_1(2H - K_{\text{кр}}) - \gamma_2\kappa. \quad (1.129)$$

Здесь γ_1 и γ_2 — некоторые положительные коэффициенты; кривизну линии обрыва мы считаем положительной, если она является выпуклой по отношению к фронтальной поверхности.

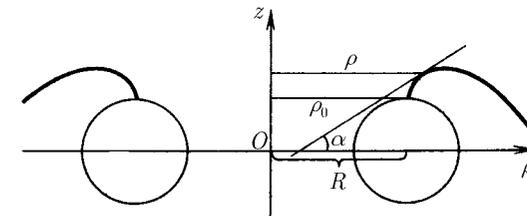


Рис. 1.48. К определению величин α и ρ

Рассмотрим в рамках кинематического описания эволюцию простого (нескрученного) вихревого кольца. Введем цилиндрическую систему координат z, ρ, φ с осью z , являющейся осью аксиальной симметрии кольца.

Вследствие цилиндрической симметрии достаточно рассмотреть эволюцию линии, образуемой сечением кольца плоскостью $\varphi = \text{const}$, т. е. меридиана вихревого кольца (рис. 1.48). Поскольку эта линия плоская, то, очевидно, кинематическое уравнение, описывающее ее эволюцию, совпадает с (1.95). Однако в отличие от случая спиральной волны на плоскости зависимость скоростей V и G от кривизны K меридиана вихревого кольца дается соотношениями (1.128) и (1.129). Средняя кривизна H для вихревого кольца легко вычисляется:

$$H = \frac{K - \rho^{-1} \sin \alpha}{2}, \quad (1.130)$$

а тангенциальная кривизна линии обрыва

$$\kappa = -\frac{1}{\rho_0} \cos \alpha_0, \quad (1.131)$$

где ρ — расстояние от оси z до соответствующего участка поверхности, α — угол между касательной к меридиану кольца на этом участке и осью ρ (см. рис. 1.48), α_0 — угол между касательной и осью ρ при подходе к свободному концу меридиана, ρ_0 — расстояние от оси z до свободного конца.

В условиях применимости квазистационарного приближения форма фронтальной поверхности вблизи линии обрыва быстро подстраивается к мгновенным значениям средней кривизны H_0 этой поверхности вблизи обрыва и кривизны самой линии обрыва κ . Поэтому достаточно следить за движением концевой точки линии, получаемой путем сечения вихревого кольца меридиональной плоскостью. Можно показать, что оно описывается уравнениями

$$\dot{\rho} = -V(0) \sin \alpha_0 - G \cos \alpha_0, \quad (1.132)$$

$$\dot{z} = V(0) \cos \alpha_0 - G \sin \alpha_0, \quad (1.133)$$

$$\dot{\alpha}_0 = -D \left(\frac{\partial K}{\partial l} \right)_{l=0} - DK_0 \frac{\cos \alpha_0}{\rho_0} - \frac{D}{2\rho_0^2} \sin 2\alpha_0 + GK_0, \quad (1.134)$$

$$\dot{K}_0 = - \left(G - D \frac{\cos \alpha_0}{\rho_0} \right) - \frac{DK_0}{2\rho_0} (3 \cos 2\alpha_0 + 1), \quad (1.135)$$

где

$$\left(\frac{\partial K}{\partial l} \right)_{l=0} = \zeta \sqrt{\frac{V_0}{D}} \sqrt{K_0^3}.$$

В сочетании с (1.128)–(1.131) эти уравнения полностью определяют закон движения точки обрыва в меридиональной плоскости и, следовательно, временную эволюцию простого вихревого кольца.

Мы считаем, что радиус R вихревого кольца гораздо больше толщины его нити, которая близка по значению к диаметру ядра спиральной волны. Нетрудно убедиться, что при $R \rightarrow \infty$, т. е. для цилиндрического вихря, уравнения (1.132)–(1.135) имеют решение, для которого частота вращения совпадает с частотой спиральной волны ($\alpha_0 = \omega_0 t$), а кривизна K_0 равна $K_{\text{кр}}$. В линейном приближении по $1/R$ следует заменить в правых частях уравнений (1.134), (1.135) величину ρ_0 на R и положить $\alpha_0 \approx \omega_0 t$. В результате мы приходим к уравнениям, сходным с теми, которые описывают резонанс спиральных волн при полном совпадении двух частот. Можно поэтому ожидать, что в меридиональной плоскости центр нити вихря будет медленно смещаться со скоростью, пропорциональной амплитуде модуляции, т. е. величине $1/R$.

Подробный расчет [29] показывает, что в линейном по $1/R$ приближении радиус вихревого кольца изменяется с течением времени по закону

$$\dot{R} = -\frac{D}{R} \left(1 - \frac{3}{4\beta^2} \frac{q_1^2 + q_2}{q_1^2 + 1} \right), \quad (1.136)$$

где $\beta = \sqrt{DK_{\text{кр}}/V_0} \ll 1$ и использованы обозначения $q_1 = \gamma_1/D$ и $q_2 = (\gamma_2 - D)/D$. Одновременно кольцо смещается в вертикальном направлении (т. е. вдоль своей оси симметрии) со скоростью

$$\dot{z}_0 = -\frac{D}{R} \left(\frac{q_2}{2\zeta\beta} + \frac{3}{4\beta^2} \frac{q_1 q_2}{q_1^2 + 1} \right). \quad (1.137)$$

Если вихрь закручен в противоположную сторону, то направление его смещения вдоль оси симметрии меняется на обратное.

Таким образом, вихревое кольцо почти всегда неустойчиво. Оно либо коллапсирует ($\dot{R} < 0$) и исчезает, либо раздувается ($\dot{R} > 0$) с течением времени. Сжатие или раздувание сопровождаются дрейфом кольца вдоль оси своей симметрии.

Имеется, однако, узкий интервал значений параметров q_1 и q_2 , в котором скорость \dot{R} очень мала и проходит через нулевое значение (см. (1.136)). В пределах этого интервала наряду с линейным по $1/R$ слагаемым в выражении для \dot{R} необходимо учитывать также члены следующих, более высоких порядков. Детальный анализ показывает⁷, что слагаемые порядка $1/R^2$ отсутствуют, а член порядка $1/R^3$ входит в выражение для скорости \dot{R} с положительным коэффициентом. Поэтому, если в линейном по $1/R$ приближении вихревое кольцо сжимается, но скорость сжатия очень мала, это

⁷Эти расчеты были проведены одним из авторов (А. С. М.) совместно с Н. В. Хрустовой.

нелинейное положительное слагаемое порядка $1/R^3$ будет ограничивать сжатие и стабилизировать вихревое кольцо.

При выполнении неравенств $q_1^2 \gg q_2$ радиус стабильного вихревого кольца дается выражением

$$R = R_0 \sqrt{\frac{13}{32} \xi \beta q_1} \frac{1}{\sqrt{(q_1/\beta)^2 - 3/4}}, \quad (1.138)$$

где $R_0 = V_0/\omega_0$ есть радиус нити вихревого кольца, практически совпадающий с радиусом ядра спиральной волны в двумерной возбудимой среде.

Как следует из (1.138), устойчивые вихревые кольца существуют при $q_1^2 > (3/4)\beta^2$, причем непосредственно при $q_1^2 = (3/4)\beta^2$ радиус устойчивого вихревого кольца обращается в бесконечность. С увеличением q_1 радиус кольца быстро убывает. Выражение (1.138) справедливо, пока $R \gg R_0$. Решение в виде устойчивого вихревого кольца теряется, когда R оказывается порядка R_0 .

Заметим, что, согласно (1.137), стабильное вихревое кольцо медленно смещается со скоростью около $\beta(D/R)$ вдоль своей оси симметрии.

Стабильные вихревые кольца наблюдались в численном эксперименте [29] для одной конкретной модели возбудимой среды.

Мы уже обращали внимание, что на больших удалениях от центра вихревое кольцо неотличимо по картине испускаемых им волн от сферического пейсмейкера. Однако в отличие от истинного пейсмейкера, обязанного своим существованием неоднородности среды и присутствием в ней группы автоколебательных элементов, такой источник может быть создан в однородной среде; при этом он не покоится — его центр смещается со временем вдоль направления оси симметрии вихревого кольца.



Рис. 1.49. Эволюция начального возмущения нити прямого вихря в среде с более высокой (а) и менее высокой (б) возбудимостью

Хотя приведенные выше результаты относились непосредственно лишь к эволюции простого вихревого кольца, они позволяют описать в простейшем приближении поведение со временем любого вихря, нить которого

произвольно (но не очень сильно) деформирована. В самом деле, если рассмотреть небольшой участок такого вихря, он будет выглядеть как часть вихревого кольца соответствующего радиуса.

Пусть исходно мы имели прямой вихрь (цилиндрический свиток) и немного деформировали локально его нить (рис. 1.49а). Если параметры среды таковы, что вихревое кольцо в ней сжимается, деформация с течением времени будет стремиться стать меньше. Иными словами, в этом случае нить вихря обладает упругостью и стремится к сокращению с течением времени. В обратном случае, когда вихревое кольцо расширяется, всякий «вырост» на нити раздувается со временем — нить вихря стремится к удлинению (рис. 1.49б). В результате прямой цилиндрический свиток оказывается неустойчивым по отношению к малым деформациям его нити. Это должно приводить к формированию очень сложных (и, возможно, даже хаотически организованных) структур в безграничных средах.

Недавно был рассмотрен [1] резонанс вихревых колец, т. е. их реакция на периодическую однородную модуляцию возбудимости среды. Оказывается, что при определенных условиях, подбирая амплитуду и фазу модуляции, можно стабилизировать раздувающиеся вихревые кольца и управлять скоростью их смещения вдоль центральной оси.

Обсудим в заключение свойства скрученных вихрей. Для цилиндрического скрученного свитка (рис. 1.47) линия обрыва волнового фронта представляет собой винтовую линию, намотанную на цилиндр — нить вихря. Скрученность такого вихря естественно характеризовать параметром $\mu = 2\pi/h$, где h — шаг винтовой линии. В зависимости от того, является ли винтовая линия обрыва правой или левой (положительное направление оси вихря определяется вектором угловой скорости вращения), скрученность μ будет, соответственно, положительной или отрицательной.

Кинематические расчеты показывают, что угловая скорость вращения скрученного свитка больше, чем нескрученного. При малых значениях скрученности μ угловая скорость вращения скрученного свитка равна [47]

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{|\mu|}{K_{\text{кр}}} \right]. \quad (1.139)$$

Результаты численного моделирования [208] свидетельствуют, что для каждой среды существует максимальное допустимое значение скрученности $\mu_{\text{кр}}$: если вихрь скрутить более сильно, он рвется. Максимально скрученный вихрь испускает волны с периодом порядка T_{min} , т. е. с периодом, близким к минимальному возможному интервалу следования волн возбуждения.

Если в начальный момент времени вихрь скручен неоднородно, т. е. $\mu = F(z)$, то по нему побегут «волны скрученности» [47]. Возмущения скрученности, имеющие разные знаки, распространяются вдоль вихря в противоположных направлениях, но с одинаковой скоростью

$$u = \frac{3}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \frac{\omega_0}{K_{\text{кр}}}. \quad (1.140)$$

При столкновении двух волн скрученности образуются разрывы (аналог ударных волн).

Заметим, что приведенные результаты относятся, конечно, и к скрученным вихревым кольцам, для которых нить замкнута в окружность. Скрученные вихревые кольца сжимаются (или раздуваются) и дрейфуют вдоль аксиальной оси примерно так же, как и нескрученные кольца, поведение которых обсуждалось нами выше.

Если внутри конечного объема возбудимой среды создать цилиндрический скрученный свиток, так что его нить будет выходить на ограничивающие этот объем поверхности, то, как показывает численное моделирование, этот свиток нестационарен. Он раскручивается и с течением времени превращается в простой вихрь. Однако скрученные вихри естественно возникают в *неоднородных* возбудимых средах.

Пусть возбудимая среда состоит из двух областей. В верхней области спиральные волны (и нескрученные вихри) имеют период вращения T_1 , а в нижней период вращения спиральных волн равен T_2 , причем $T_2 > T_1$. Если теперь создать простой вихрь с нитью, перпендикулярной поверхности раздела двух областей возбудимой среды, то в нижней он превратится в скрученный вихрь (см. [208]). Степень скрученности вихря определяется условием совпадения периода его вращения T с периодом вращения T_1 нескрученного вихря в верхней области среды (напомним, что скручивание приводит к ускорению вращения вихря).

В неоднородных средах, где значения параметров плавно варьируются, вихри, как правило, должны быть скрученными. Будучи более быстрыми, такие вихри вытесняют простые нескрученные вихри из активной среды.

10. Фазовая динамика в осциллирующих активных средах

Пусть отдельно взятый элемент активной среды совершает устойчивые периодические автоколебания. Эти колебания характеризуются своей формой (не обязательно гармонической), амплитудой, частотой и начальной

фазой. При этом амплитуда, частота и форма колебаний однозначно определяются свойствами самого автоколебательного элемента, а начальная фаза колебаний φ может быть произвольной. Если произвести некоторое возмущение, форма осцилляций вернется к исходной, а их амплитуда возвратится к своему устойчивому значению по прошествии некоторого времени релаксации $\tau_{\text{рел}}$. Однако в результате возмущения фаза φ не вернется уже к исходному значению, а приобретет некоторую добавку $\delta\varphi$.

Допустим далее, что в нашем распоряжении имеются сеть из связанных между собой автоколебательных элементов либо распределенная активная среда, отдельный физически малый элемент которой обладает автоколебательными свойствами. Будем предполагать, что взаимодействие между элементами является локальным (т. е. взаимодействуют лишь соседние элементы), причем если два соседних элемента совершают синхронные колебания (с одинаковой формой, амплитудой и начальной фазой), то взаимодействие между ними отсутствует; если же рассогласование в колебаниях двух элементов малое, то и взаимодействие между ними будет слабым в меру такого рассогласования.

Очевидно, что при сделанных предположениях активная среда допускает режим синхронных автоколебаний, при котором все элементы среды совершают колебания с одной и той же фазой $\varphi(\mathbf{r}, t) = \text{const}$, а амплитуда и форма колебаний в каждой точке среды — те же, что и для отдельно взятого автоколебательного элемента.

Более того, если фаза колебаний меняется вдоль среды, но ее пространственное изменение является плавным и характеризуется достаточно большим пространственным масштабом L , следует ожидать, что тогда распределение фазы $\varphi(\mathbf{r}, t)$ будет медленно меняться со временем. Действительно, чем больше пространственный масштаб L изменения фазы, тем меньше рассогласование по фазам колебаний для двух соседних элементов среды и тем слабее взаимодействие.

С другой стороны, возмущения амплитуды и формы колебаний релаксируют быстро, независимо от того, каков их характерный пространственный масштаб. Их затухание определяется свойствами отдельно взятого элемента среды и происходит за время порядка $\tau_{\text{рел}}$.

Таким образом, для возмущений с достаточно большими пространственными масштабами характерные времена для изменения фаз $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и амплитуд колебаний сильно различаются. Поскольку амплитуда колебаний в каждой точке стремится быстро (и независимо от других точек) возвратиться к своему устойчивому значению, при наличии слабого градиента фазы $\nabla\varphi$ амплитуды колебаний быстро адиабатически подстраиваются к мгновенному значению этого градиента. Поэтому их отклонения от рав-

новесного значения малы в меру малости градиента фазы $\nabla\varphi$ (т. е. в меру слабости взаимодействия между элементами среды).

Динамика плавных распределений фаз должна описываться отдельным уравнением, в которое уже не входят амплитуды и форма колебаний. Это уравнение можно вывести, воспользовавшись весьма общими соображениями.

В однородной активной среде скорость изменения фазы в данной точке среды $\partial\varphi/\partial t$ не может зависеть от направления градиента фазы. Поэтому при достаточно малых градиентах разложение скорости изменения фазы по степеням градиента фазы должно начинаться не с линейного, а с квадратичного слагаемого:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a(\nabla\varphi)^2 + \dots \quad (1.141)$$

Согласно (1.141), для неоднородностей с пространственным масштабом L скорость изменения фазы пропорциональна $1/L^2$. Заметим теперь, что, наряду с градиентом, в правую часть уравнения (1.141) могут входить также слагаемые с более высокими пространственными производными. Нам необходимо сохранить только те из подобных слагаемых, которые приводят к вкладам порядка $1/L^2$ по обратному пространственному масштабу неоднородности фазы. Нетрудно убедиться, что есть всего одно такое слагаемое, пропорциональное лапласиану фазы $\Delta\varphi$.

Итак, уравнение для плавных изменений фазы φ должно иметь вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a(\nabla\varphi)^2 + b\Delta\varphi, \quad (1.142)$$

где a и b — некоторые коэффициенты с размерностью коэффициента диффузии (т. е. $[a] = [b] = \text{см}^2/\text{с}$). Чтобы определить значение этих коэффициентов, нужно использовать полные уравнения динамики для данной активной среды (см. ниже).

Заметим, что, подобно уравнениям кинематики для возбудимых сред, рассматривавшимся в разделах 1.8 и 1.9, выведенное уравнение фазовой динамики (1.142) универсально в том смысле, что всякая сложная осциллирующая среда описывается в нем всего двумя параметрами a и b , а все детали взаимодействия между элементами, формы и амплитуды колебаний оказываются несущественными.

Из уравнения (1.142) следует, что характерное время τ_L для изменения неоднородности фазы с пространственным масштабом L имеет порядок величины $\tau_L \sim L^2/b$. Поскольку при выводе этого уравнения предполагалось,

что характерное время изменения для распределения фазы велико по сравнению со временем релаксации амплитуды $\tau_{\text{рел}}$ в отдельном осцилляторе, полученное уравнение применимо лишь для описания таких плавных распределений фазы, для которых пространственный масштаб неоднородности удовлетворяет условию

$$L \gg \sqrt{b\tau_{\text{рел}}}. \quad (1.143)$$

Неравенство (1.143) ограничивает область применимости уравнения фазовой динамики.

Детальная схема вывода уравнения фазовой динамики, непосредственно исходя из уравнений в частных производных, описывающих автоколебательную распределенную среду, приведена в [190]. Ниже мы даем, в качестве иллюстрации, вывод этого уравнения для *квазигармонических* автоколебательных сред.

Допустим, что автоколебательная среда описывается двумя зависящими от времени и координат переменными $u = u(\mathbf{r}, t)$ и $v = v(\mathbf{r}, t)$, из которых удобно составить комплексную величину $\eta(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r}, t) + iv(\mathbf{r}, t)$. Предположим, что изменение η со временем подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \lambda(\rho)\eta - i\omega(\rho)\eta + (D_1 + iD_2)\Delta\eta, \quad (1.144)$$

где λ и ω представляют собой некоторые функции от амплитуды $\rho = |\eta|$; функция $\lambda(\rho)$ обращается в нуль при $\rho = \rho_0$, отрицательна — при $\rho > \rho_0$ и положительна — при $\rho < \rho_0$.

Модель автоколебательной среды, характеризуемую уравнением вида (1.144), называют обычно « λ - ω -модель». Если комплексный коэффициент $D = D_1 + iD_2$, играющий роль коэффициента диффузии в уравнении (1.144), равен нулю, то среда распадается на совокупность не связанных между собой автоколебательных элементов. Нетрудно убедиться, что в установившемся режиме каждый элемент среды совершает гармонические колебания по закону

$$\eta(t) = \rho_0 \exp[-i(\omega_0 t + \varphi)] \quad (1.145)$$

с амплитудой ρ_0 , определяемой из условия $\lambda(\rho_0) = 0$, и частотой $\omega_0 = \omega(\rho_0)$. Начальная фаза φ этих колебаний остается произвольной.

Малые возмущения амплитуды $\delta\rho = \rho - \rho_0$ для отдельного элемента среды затухают со временем согласно уравнению (сп. (1.144))

$$\delta\dot{\rho} = \rho_0\lambda'(\rho_0)\delta\rho. \quad (1.146)$$

Таким образом, время релаксации амплитуды равно

$$\tau_{\text{рел}} = \frac{1}{|\rho_0(d\lambda/d\rho)_{\rho=\rho_0}|}. \quad (1.147)$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда $D \neq 0$. Если представить η в виде

$$\eta(\mathbf{r}, t) \equiv \rho(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\omega_0)t + \varphi(\mathbf{r}, t)], \quad (1.148)$$

то для неизвестных функций $\rho(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi(\mathbf{r}, t)$ можно получить уравнения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lambda(\rho)\rho + D_1 \Delta \rho - D_1 \rho (\nabla \varphi)^2 + D_2 \rho \Delta \varphi + 2D_2 \nabla \rho \nabla \varphi, \quad (1.149)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = [\omega(\rho) - \omega_0] + 2D_1 \frac{\nabla \rho \nabla \varphi}{\rho} - D_2 \frac{\Delta \rho}{\rho} + D_2 (\nabla \varphi)^2 + D_1 \Delta \varphi. \quad (1.150)$$

Ограничимся рассмотрением плавных распределений, характеризуемых большим пространственным масштабом L . Тогда следует ожидать, что амплитуда колебаний в каждой точке среды будет близка к ρ_0 , т. е. $\delta\rho/\rho_0 \ll 1$. Более того, отклонения амплитуд $\delta\rho(\mathbf{r}, t)$ будут адиабатически подстраиваться к значениям $\nabla\varphi$ и $\Delta\varphi$ в соответствующих точках. Поэтому с точностью до членов порядка $1/L^2$ мы имеем

$$\delta\rho = \rho_0 \tau_{\text{рел}} [D_2 \Delta \varphi - D_1 (\nabla \varphi)^2]. \quad (1.151)$$

Действительно, подставив (1.151) в (1.149), легко убедиться, что при выводе этого выражения отброшены как раз те слагаемые, которые отвечают более высокому порядку по параметру $1/L$.

Теперь остается только подставить $\rho = \rho_0 + \delta\rho$ в уравнение (1.150) для фазы и сохранить в нем лишь члены порядка $1/L^2$. В результате получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D_1 \Delta \varphi + D_2 (\nabla \varphi)^2 + \omega'(\rho_0) \delta\rho, \quad (1.152)$$

где $\delta\rho$ дается выражением (1.151). С учетом формулы (1.147), справедливо

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \left(-D_1 \frac{\omega'(\rho_0)}{|\lambda'(\rho_0)|} + D_2 \right) (\nabla \varphi)^2 + \left(D_1 + \frac{\omega'(\rho_0)}{|\lambda'(\rho_0)|} D_2 \right) \Delta \varphi, \quad (1.153)$$

что совпадает с уравнением (1.142).

Частным случаем λ - ω -модели является *обобщенное уравнение Гинзбурга-Ландау*

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = (\alpha_1 - i\alpha_2)\eta - (\beta_1 + i\beta_2)|\eta|^2\eta + (D_1 + iD_2)\Delta\eta, \quad (1.154)$$

для которого $\lambda = \alpha_1 - \beta_1\rho^2$, $\omega = \alpha_2 + \beta_2\rho^2$. Как следует из (1.153), в этом случае параметры a и b в уравнении фазовой динамики (1.142) таковы:

$$a = -\frac{\beta_2}{\beta_1}D_1 + D_2, \quad b = \frac{\beta_2}{\beta_1}D_2 + D_1. \quad (1.155)$$

Перейдем теперь к рассмотрению процессов, описываемых уравнением фазовой динамики (1.142). Заметим прежде всего, что с помощью подстановки

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{b}{a} \ln Q(\mathbf{r}, t) \quad (1.156)$$

оно сводится к линейному уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b \Delta Q. \quad (1.157)$$

Таким образом, решающую роль в эволюции системы играет знак коэффициента b . Если этот коэффициент положителен, уравнение (1.157) представляет собой обычное уравнение диффузии. Следовательно, любая локальная неоднородность Q (и, соответственно, φ) с характерным пространственным масштабом L полностью размывается и исчезает за время порядка L^2/b . В результате в среде устанавливается однородный режим, для которого Q и φ не зависят от пространственных координат. Это означает, что при $b > 0$ происходит *синхронизация* колебаний во всех точках среды.

Совершенно иная ситуация складывается, если коэффициент b отрицателен. В этом случае начальная неоднородность фазы не размывается, а, наоборот, сжимается и возрастает с характерным временем L^2/b . Вследствие этого однородный режим с синхронным автоколебаниями оказывается неустойчивым по отношению к малым возмущениям. Флуктуации усиливаются, причем быстрее всего идет рост наиболее коротковолновых флуктуаций. В результате в системе устанавливается хаотический, или *турбулентный*, режим [192].

Заметим, что, поскольку эволюция локальных неоднородностей фазы сопровождается их стягиванием, т. е. уменьшением пространственного масштаба, для каждой такой флуктуации по прошествии некоторого времени

условие (1.143) оказывается нарушенным, а уравнение (1.142) — неприменимым. Турбулентный режим характеризуется множественным рождением сингулярностей в распределении фазы. Для его описания необходимо использовать полные исходные уравнения распределенной автоколебательной среды. Свойства турбулентного режима оказываются поэтому не универсальными, а весьма чувствительными к конкретному виду уравнений, описывающих распределенную автоколебательную среду (см. раздел 2.31).

11. Фазовые волны и пейсмекеры

Как уже отмечалось в разделе 1.1, при распространении фазовой волны в автоколебательной среде в ней устанавливается постоянный градиент фазы колебаний

$$\nabla\varphi = -\mathbf{k} = \text{const.} \quad (1.158)$$

Благодаря этому вдоль направления вектора \mathbf{k} колебания соседних элементов происходят с постоянным сдвигом по фазе, и для наблюдателя этот режим выглядит так, как будто по среде движется волна. Эффектом того же происхождения являются «волны», бегущие по гирляндам из электрических лампочек, зажигаемых по очереди на короткое время.

Для возбуждения фазовых волн в среде необходимо создать исходный градиент фазы автоколебаний. Скорость волны при этом тем больше, чем меньше линейный градиент фазы.

Связь между элементами среды (осуществляемая, например, благодаря диффузии) не имеет принципиального значения для распространения быстрых фазовых волн, когда градиенты фазы достаточно малы⁸.

При уменьшении скорости фазовой волны, т. е. при возрастании градиента фазы автоколебаний, эффекты взаимодействия становятся все более существенными. Вообще говоря, при распространении по среде фазовой волны с волновым числом k элементы среды совершают колебания с частотой ω , несколько отличной от частоты однородных автоколебаний ω_0 .

Распространение фазовых волн можно исследовать в рамках уравнения фазовой динамики (1.142). Такая волна отвечает частному решению этого уравнения, имеющему вид

$$\varphi = -\mathbf{k}\mathbf{r} + ak^2t. \quad (1.159)$$

⁸В эксперименте [182] осциллирующую среду с реакцией Белоусова–Жаботинского, где были предварительно возбуждены быстрые волны, разделяли тонкой перегородкой из оргстекла и наблюдали, как волны «проходят» через перегородку, не ощущая ее.

Зависящее от времени слагаемое дает сдвиг частоты колебаний

$$\omega = \omega_0 + ak^2. \quad (1.160)$$

Таким образом, знак коэффициента a определяет, будет расти или же убывать частота колебаний с увеличением волнового числа. Скорость распространения фазовой волны равна

$$c = \frac{\omega_0}{k} + ak. \quad (1.161)$$

В рамках уравнения (1.142) все фазовые волны устойчивы, если $b > 0$. При $b < 0$ частное решение в виде фазовой волны по-прежнему существует, но оно уже не представляет интереса, поскольку в этом случае фазовая волна, как и другие регулярные волновые режимы, неустойчива и в среде формируется с течением времени хаотический пространственно-временной режим (раздел 2.31).

Волны с малым пространственным периодом, для которых $k \gg (b\tau_{\text{пер}})^{-1/2}$, не описываются уравнением фазовой динамики (1.142). Их исследование необходимо производить в рамках полных исходных уравнений распределенной автоколебательной среды. Обычно оказывается, что волны теряют устойчивость в области $k \sim (b\tau_{\text{пер}})^{-1/2}$.

Рассмотрим теперь, что происходит при столкновении двух волн с разными волновыми векторами. Для простоты будем считать, что волны движутся навстречу друг другу вдоль оси x , причем $\varphi(x) \rightarrow -k_1x$ при $x \rightarrow -\infty$ и $\varphi(x) \rightarrow k_2x$ при $x \rightarrow +\infty$. Такому режиму отвечает частное решение уравнения (1.157) вида

$$Q(x, t) = A_1 \exp\left[-\frac{a}{b}k_1x + \frac{a^2}{b}k_1^2t\right] + A_2 \exp\left[\frac{a}{b}k_2x + \frac{a^2}{b}k_2^2t\right], \quad (1.162)$$

где коэффициенты A_1 и A_2 находятся из начальных условий. Напомним, что

$$\varphi(x, t) = \frac{b}{a} \ln Q(x, t). \quad (1.163)$$

Поскольку Q представляет собой сумму двух экспоненциальных вкладов, независимо меняющихся по x и t , почти всюду на оси x будет доминировать какое-то одно из этих двух слагаемых. Простой анализ показывает, что вне узкого слоя шириной порядка

$$\delta x \sim \frac{b}{a(k_1 + k_2)} \quad (1.164)$$

с центром в точке

$$X(t) = a(k_1 - k_2)t \quad (1.165)$$

справа (т. е. при $x > X(t)$) преобладает второе, а слева (т. е. при $x < X(t)$) — первое слагаемое в выражении (1.162). Поскольку (см. (1.163)) первое слагаемое отвечает волне, движущейся в положительном, а второе — в отрицательном направлении оси x , можно сказать, что две движущиеся навстречу фазовые волны гасят друг друга в пределах узкого слоя шириной $\delta x \sim b/[a(k_1 + k_2)]$, а точка их встречи медленно смещается с постоянной скоростью $V_B = a(k_1 - k_2)$ вдоль оси x .

Заметим, что, учитывая зависимость $\omega = \omega_0 + ak^2$ для частоты фазовой волны от ее волнового числа, выражение для скорости смещения границы между областями, занятыми двумя волнами, можно представить также в виде

$$V_B = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 + k_2}. \quad (1.166)$$

Таким образом, с течением времени граница смещается вглубь области, занятой менее высокочастотной волной. Иными словами, область с более высокочастотными колебаниями постепенно растет и вытесняет ту область, в которой колебания имеют более низкую частоту.

До сих пор мы рассматривали только эффекты в однородных автоколебательных средах, где свойства всех элементов среды идентичны. Пусть в пределах некоторой малой области элементы среды имеют собственную частоту автоколебаний, превышающую частоту колебаний остальных элементов среды. Тогда эта область станет источником концентрически расходящихся фазовых волн, или *пейсмекером*.

Предположим, что собственная частота автоколебаний отдельно взятых элементов среды зависит от координат r по некоторому закону $\omega(r)$, причем $\omega(r) \rightarrow \omega_0$ при $r \rightarrow \infty$. При выполнении определенных условий (см. ниже) фазовая динамика в такой системе описывается уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega(r) - \omega_0 + a(\nabla \varphi)^2 + b \Delta \varphi. \quad (1.167)$$

После преобразования (1.156) оно сводится к линейному уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = b \Delta Q + \frac{a}{b}[\omega(r) - \omega_0]Q, \quad (1.168)$$

которое оказывается эквивалентным квантовому уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + U(r)\psi, \quad (1.169)$$

если положить

$$\psi \rightarrow Q, \quad \frac{\hbar^2}{2m} \rightarrow b, \quad U(r) \rightarrow -\frac{a}{b}[\omega(r) - \omega_0] \quad (1.170)$$

и считать время мнимым: $(i/\hbar)t \rightarrow t$. Когда частота $\omega(r)$ превышает ω_0 внутри некоторой области, то в терминах уравнения Шредингера это означает, что в данной области имеется некоторая потенциальная яма. Пусть характерный размер такой области равен r_0 .

Уравнение (1.168) имеет общее решение

$$Q(r, t) = \sum_n C_n e^{\lambda_n t} \mu_n(r), \quad (1.171)$$

где λ_n и $\mu_n(r)$ являются решениями задачи на собственные значения

$$\mathbf{L}\mu = \lambda\mu \quad (1.172)$$

для линейного оператора

$$\mathbf{L} = b\Delta + \frac{a}{b}[\omega(r) - \omega_0]. \quad (1.173)$$

Положительные собственные значения λ_n соответствуют связанным состояниям частицы в потенциальной яме $U(r)$. Отрицательные собственные значения λ_n образуют сплошной спектр; поскольку, однако, вклад от таких членов в Q экспоненциально затухает со временем, его можно не учитывать. Наконец, поскольку $U(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, существуют также нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$ и соответствующая собственная функция $\mu_0(r)$. Как известно [94], для любого связанного состояния частицы в потенциальной яме волновая функция экспоненциально спадает на достаточно больших удалениях от центра ямы. Ввиду аналогии с уравнением Шредингера имеем

$$\mu_n(r) \approx \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{r}{r_n}\right), \quad r \gg r_0, \quad (1.174)$$

где r_n — характерный радиус локализации,

$$r_n = \sqrt{\frac{b}{\lambda_n}}. \quad (1.175)$$

Для нулевого собственного значения собственная функция $\mu_0(r) \approx 1$ вдали от области, где сосредоточено возмущение $\omega(r)$.

Предположим вначале, что в потенциальной яме $U(r)$ имеется всего одно связанное состояние (т.е. есть только одно положительное значение λ_1 и соответствующая собственная функция $\mu_1(r)$). Тогда, пренебрегая затухающим вкладом от собственных функций сплошного спектра, с учетом (1.161) и (1.163), получаем

$$\varphi(r, t) = \frac{b}{a} \ln [C_0 \mu_0(r) + C_1 e^{\lambda_1 t} \mu_1(r)]. \quad (1.176)$$

При $r \gg r_0$, т.е. вдали от области, где локализовано возмущение $\omega(r)$, выражение (1.176) упрощается:

$$\varphi(r, t) = \frac{b}{a} \ln \left\{ C_0 + C_1 \exp \left[\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right] \right\}. \quad (1.177)$$

Это решение описывает рождающийся пейсмейкер. Внутри растущей сферической области радиуса $\mathcal{R}(t) = \sqrt{b\lambda_1}t$ мы имеем систему концентрических расходящихся фазовых волн

$$\varphi(r, t) \approx \frac{b}{a} \left[\lambda_1 t - \sqrt{\frac{\lambda_1}{b}} r \right] \quad (1.178)$$

с частотой $\omega = \omega_0 + (b/a)\lambda_1$ и волновым числом $k = \sqrt{\lambda_1 b/a^2}$. Вне этой области сохраняются однородные автоколебания с частотой ω_0 . С течением времени область, заполненная расходящимися волнами, расширяется и захватывает всю среду.

Если в потенциальной яме, отвечающей возмущению $\omega(r)$, содержится несколько связанных состояний (т.е. есть несколько различных положительных собственных значений λ_n), картина существенно не меняется. Вместо λ_1 в выражениях (1.177) и (1.178) для растущего пейсмейкера теперь следует брать максимальное из значений λ_n , отвечающее наиболее глубокому уровню в данной потенциальной яме.

Известно [94], что в одномерном и двумерном случаях любая сколь угодно мелкая потенциальная яма содержит хотя бы одно связанное состояние. Следовательно, для одномерной и двумерной автоколебательной среды достаточно сколь угодно слабого локального возмущения частоты $\omega(r)$, чтобы родился пейсмейкер, действие которого охватит со временем всю активную среду. В отличие от этого в трехмерном случае потенциальная яма содержит связанное состояние, лишь если она является достаточно

глубокой. Переформулируя соответствующее условие с учетом соотношений (1.170), можно получить условие, при выполнении которого имеется хотя бы одно положительное собственное значение λ . Это условие таково:

$$\delta\omega \gg \frac{b^2}{ar_0^2}, \quad (1.179)$$

где $\delta\omega$ — характерное возмущение частоты, а r_0 — характерный размер области, где такое возмущение локализовано. Когда условие (1.179) нарушено, рождение пейсмейкера в трехмерной неоднородной автоколебательной среде не происходит.

Заметим, наконец, что само описание с помощью уравнения фазовой динамики (1.173) справедливо, если для максимального из собственных значений λ_n радиус локализации соответствующей функции $\mu_n(r)$ превышает $\sqrt{b\tau_{\text{рел}}}$. Поскольку, согласно (1.175), этот радиус равен $\sqrt{b/\lambda_{\text{max}}}$, должно выполняться условие $\lambda_{\text{max}}\tau_{\text{рел}} \ll 1$. Поскольку всегда $\lambda_{\text{max}} \leq \delta\omega_{\text{max}}(a/b)$, условие применимости этого приближенного описания заведомо выполняется, если

$$\delta\omega_{\text{max}} \ll b/a\tau_{\text{рел}}. \quad (1.180)$$

Как было показано выше, при столкновении двух периодических фазовых волн с разными волновыми числами (и, следовательно, разными частотами) происходит их полное взаимное гашение. Узкий слой, в пределах которого осуществляется гашение, движется с течением времени в сторону области, занятой менее высокочастотной фазовой волной. Из этого результата следует, что если в распределенной активной среде есть два источника фазовых волн (какими являются пейсмейкеры), то наиболее высокочастотный из них полностью подавит с течением времени действие источника, имеющего меньшую частоту генерации. Таким образом, в среде происходит конкуренция между пейсмейкерами.

Если первоначально в среде имеется много различных пейсмейкеров со случайным набором частот, конкуренция между ними приведет к последовательному подавлению пейсмейкеров со все более высокими частотами, пока в среде не останется один-единственный пейсмейкер, для которого частота генерации максимальна [206].

12. Спиральные волны в автоколебательных активных средах

Спиральные волны наблюдаются не только в возбудимых, но и автоколебательных активных средах. Свойства этих волн во многом аналогичны

тем, что рассматривались нами в разделе 1.6. На больших удалениях от центра линии постоянной фазы имеют форму архимедовой спирали, частота вращения спиральной волны однозначно определяется характеристиками самой автоколебательной среды и не зависит от начальных условий, приведших к образованию такого автоволнового источника. С приближением к центру спиральной волны амплитуда колебаний монотонно уменьшается и обращается в нуль в центральной точке. Поэтому в автоколебательных средах также можно ввести понятие ядра спиральной волны как той области, где амплитуда колебаний существенно отличается от амплитуды однородных автоколебаний в данной среде. Однако в отличие от возбужденных сред размеры ядра в автоколебательной среде всегда малы и совпадают по порядку величины с диффузионной длиной $\sqrt{b\tau_{\text{рел}}}$.

Заметим, что, поскольку в пределах ядра амплитуда испытывает резкие изменения на длине порядка диффузионной, в этой области уравнение фазовой динамики (1.142) теряет применимость. Ввиду этого оказывается, что в рамках приближения фазовой динамики нельзя дать исчерпывающее описание спиральной волны и, в частности, рассчитать частоту ее вращения. Для этого необходимо обратиться к полным уравнениям в частных производных. Таким образом, свойства спиральной волны оказываются более тесно связанными с конкретным видом уравнений, характеризующих распределенную среду.

Ниже мы рассмотрим свойства спиральных волн в квазигармонических автоколебательных средах, описываемых λ - ω -моделью (1.144), частным случаем которой является обобщенное уравнение Гинзбурга–Ландау (1.154). Впервые такой расчет был произведен П. Хаганом в [169], ему мы и будем следовать в своем изложении.

Вначале ограничимся рассмотрением случая, когда $D_2 = 0$, т. е. мнимая добавка к эффективному коэффициенту диффузии отсутствует ($D_1 = D$). Напомним, что однородные автоколебания среды имеют амплитуду ρ_0 , определяемую условием $\lambda(\rho_0) = 0$, и осуществляются с частотой $\omega_0 = \omega(\rho_0)$. Диффузионная длина в данном случае равна

$$L_{\text{диф}} = \sqrt{b\tau_{\text{рел}}} = \sqrt{\frac{D}{|\rho_0 \lambda'(\rho_0)|}}. \quad (1.181)$$

Если ввести полярную систему координат (r, Θ) , спиральной волне, вращающейся с частотой ω , отвечает решение вида

$$\rho = \rho(r), \quad \varphi = \Theta - \chi(r) - (\omega_* - \omega_0)t. \quad (1.182)$$

Подстановка выражений (1.182) в уравнения (1.149) и (1.150) при $D_2 = 0$ и $D_1 = D$ дает

$$\rho_{rr} + \frac{1}{r}\rho_r + \left(\frac{1}{D}\lambda(\rho) + \frac{1}{r^2} - \chi_r^2\right)\rho = 0, \quad (1.183)$$

$$\chi_{rr} + \frac{1}{r}\chi_r + 2\left(\frac{\rho_r}{\rho}\right)\chi_r = \frac{\omega_* - \omega(\rho)}{D}. \quad (1.184)$$

Из требования, чтобы $\rho(r)$ и $\chi_r(r)$ оставались конечными при $r = 0$, следует

$$\rho(r) \sim r \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0, \quad \chi_r(0) = 0. \quad (1.185)$$

Мы должны также потребовать, чтобы $\rho(r)$ асимптотически стремилось к какому-то отличному от нуля постоянному значению при $r \rightarrow \infty$. Действительно, амплитуда колебаний не может неограниченно возрастать с удалением от центра. С другой стороны, она не может и обращаться в нуль при $r \rightarrow \infty$, поскольку однородное состояние покоя в λ - ω -модели неустойчиво по отношению к малым возмущениям. Наконец, с помощью более тонких рассуждений можно показать, что неустойчивым будет также любое решение, для которого функция $\rho(r)$ является осциллирующей при больших r .

Пусть $\rho \rightarrow \rho_*$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда из (1.183) и (1.184) следует, что

$$\omega_* = \omega(\rho_*), \quad \chi_r(r) \rightarrow \pm k_* \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.186)$$

где $k_* = \sqrt{\lambda(\rho_*)}$.

Таким образом, на больших удалениях от центра спиральная волна (спираль) имеет постоянный шаг $h_{\text{св}} = 2\pi/|\chi_r| = 2\pi/k_*$, т. е. она является архимедовой. Шаг спирали равен пространственному периоду плоской фазовой волны с частотой ω_* . Два знака для $\chi_r(\infty)$ в (1.186) отвечают двум разным направлениям закручивания спирали.

Можно показать, что условия (1.185) и (1.186) являются совместными лишь при одном, вполне определенном выборе неизвестного параметра ω_* в уравнениях (1.183) и (1.184). Этим определяется частота вращения спиральной волны. Поскольку дифференциальные уравнения (1.183) и (1.184) не допускают полного аналитического решения, для нахождения величины ω_* , а также функций $\rho(r)$ и $\chi(r)$ приходится прибегать к приближенным методам.

Построим прежде всего решение в частном случае, когда $\omega(\rho) = \omega_0 = \text{const}$, т. е. отсутствует нелинейный сдвиг частоты. В этом случае взаимодействие между элементами среды не влияет на частоту совершаемых

ими колебаний. Очевидно, что частота спиральной волны также должна совпадать с ω_0 . Из (1.184) тогда следует, что при $\chi(r)(0) = 0$ должно выполняться равенство $\chi_r(r) = 0$ и, согласно (1.182), спираль вырождается в прямолинейный луч, вращающийся с угловой скоростью ω_0 .

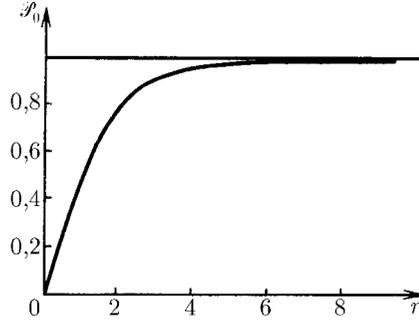


Рис. 1.50. Расчетная зависимость $\mathcal{P}_0(r)$ для среды, описываемой обобщенным уравнением Гинзбурга–Ландау (1.154)

В рассматриваемом случае амплитуда колебаний $\rho(r)$ подчиняется уравнению

$$\rho_{rr} + \frac{\rho_r}{r} - \frac{\rho}{r^2} + \frac{\rho\lambda(\rho)}{D} = 0, \quad (1.187)$$

которое должно быть дополнено граничными условиями $\rho(0) = 0$ и $\rho(r) \rightarrow \text{const}$ при $r \rightarrow \infty$. Заметим, что тогда $\rho(\infty) = \rho_0$, т.е. совпадает с амплитудой однородных колебаний. Если известен конкретный вид функции $\lambda(\rho)$, уравнение (1.187) с такими граничными условиями может быть численно проинтегрировано, в результате чего будет получена некоторая зависимость $\rho = \mathcal{P}_0(r)$. На рис. 1.50 показан полученный путем численного интегрирования вид функции $\mathcal{P}_0(r)$ для среды, описываемой обобщенным уравнением Гинзбурга–Ландау (1.154).

Рассмотрим теперь среду с нелинейным сдвигом частоты, в которой, однако, зависимость частоты от амплитуды колебаний является очень слабой:

$$\omega(\rho) = \bar{\omega} + \epsilon\delta\omega(\rho), \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (1.188)$$

Введем малый параметр q , определив его как

$$q = \frac{\omega'(\rho_0)}{|\lambda'(\rho_0)|} = \frac{\epsilon\delta\omega'(\rho_0)}{|\lambda'(\rho_0)|}, \quad |q| \ll 1. \quad (1.189)$$

Решение для спиральной волны в такой среде может быть получено с помощью метода *сшиваемых асимптотических разложений*. Суть его в том,

чтобы независимо построить приближенные решения уравнений (1.183), (1.184) во *внутренней* ($r \ll L_{\text{диф}}e^{1/|q|}$) и *внешней* ($r \gg L_{\text{диф}}$) областях. Поскольку $|q| \ll 1$, эти две области перекрываются. Сшивка двух приближенных решений в интервале их перекрытия позволяет найти неизвестный параметр ω_* , входящий в уравнение (1.184), — частоту вращения спиральной волны.

Опуская детали расчета, которые можно найти в [169], приведем окончательные результаты.

Частота вращения спиральной волны ω_* и волновое число k_* равны

$$\omega_* = \omega_0 - qDk_*^2, \quad (1.190)$$

$$k_* = \frac{\zeta}{|q|L_{\text{диф}}} \exp\left[-\frac{\pi}{2|q|}\right]. \quad (1.191)$$

Числовой коэффициент ζ зависит от конкретного вида функций $\lambda(\rho)$ и $\omega(\rho)$; для обобщенного уравнения Гинзбурга–Ландау $\zeta = 0,509$.

Во внутренней области справедливо разложение по степеням q :

$$\begin{aligned} \rho(r) &= \mathcal{P}_0(r) + q^2\mathcal{P}_1(r) + \dots, \\ \chi_r(r) &= |q|v_0(r) + |q|^3v_1(r) + \dots \end{aligned} \quad (1.192)$$

В частности,

$$v_0(r) = -\frac{\lambda'(\rho_0)}{\delta\omega'(\rho_0)} \frac{1}{r\mathcal{P}_0^2(r)} \int_0^r y\mathcal{P}_0^2(y)[\delta\omega(\rho_0) - \delta\omega(\mathcal{P}_0(y))] dy, \quad (1.193)$$

причем при $L_{\text{диф}} \ll r \ll L_{\text{диф}}e^{1/|q|}$ справедливо соотношение

$$v_0(r) \left(\frac{L_{\text{диф}}}{r}\right) \left[\ln \frac{r}{L_{\text{диф}}} + C_1\right]. \quad (1.194)$$

Внешнюю область можно разделить на ближнюю ($L_{\text{диф}} \ll r \ll 1/k_*$) и дальнюю ($r \gg 1/k_*$). В ближней области имеем

$$\chi_r(r) \approx \left(\frac{L_{\text{диф}}}{r}\right) \text{tg}\left\{|q|\left[\ln \frac{r}{L_{\text{диф}}} + C_1\right]\right\}, \quad (1.195)$$

в дальней области —

$$\chi_r(r) \approx -\frac{k_*K'_0(|q|kr)}{K_0(|q|kr)}, \quad (1.196)$$

где $K_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя с асимптотикой $K_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. В частности, при $qkr \ll 1$ функция χ_r дается разложением:

$$\chi_r(r) \approx k_* \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1}{q|kr|} - \frac{1}{8} \frac{1}{(qkr)^2} + \dots \right]. \quad (1.197)$$

Во всей внешней области амплитуда колебаний $\rho(r)$ связана с $\chi_r(r)$ соотношением

$$\rho(r) = \rho_0 - \left(\frac{1}{r^2} + \chi_r^2 \right) L_{\text{диф}}^2. \quad (1.198)$$

При $r \rightarrow \infty$ амплитуда колебаний стремится к пределу

$$\rho_* = \rho_0 - (L_{\text{диф}} k_*)^2. \quad (1.199)$$

До сих пор здесь мы рассматривали только такие автоколебательные среды, для которых эффективный коэффициент диффузии D был действительным. Приведенные результаты нетрудно обобщить на случай, когда $D = D_1 + iD_2$. Все отличие заключается в том, что теперь в качестве малого параметра q необходимо выбрать величину

$$q = \frac{D_1 [\omega'(\rho_0)/|\lambda'(\rho_0)|] - D_2}{D_1 + [\omega'(\rho_0)/|\lambda'(\rho_0)|] D_2}, \quad (1.200)$$

а эффективная диффузионная длина равна

$$L_{\text{диф}} = \frac{1}{\sqrt{|\lambda'(\rho_0)\rho_0|}} \sqrt{D_1 + \frac{\omega'(\rho_0)}{|\lambda'(\rho_0)|} D_2}. \quad (1.201)$$

Заметим, что теперь уже для применимости метода сшиваемых асимптотических разложений недостаточно, чтобы нелинейный сдвиг частоты был мал. Как видно из (1.200), это еще не обеспечивает малости параметра q .

Интересно, что определенный формулой (1.200) параметр q легко выразить через коэффициенты a и b , входящие в уравнения фазовой динамики (1.142):

$$q = -\frac{a}{b}. \quad (1.202)$$

Учитывая также, что $L_{\text{диф}} = \sqrt{b\tau_{\text{рел}}}$, можно переписать (1.191) в форме

$$k_* = \zeta \sqrt{\left(\frac{b}{a^2 \tau_{\text{рел}}} \right) \exp \left[-\frac{\pi b}{2|a|} \right]}, \quad (1.203)$$

где ζ — некоторый безразмерный числовой коэффициент. Частота вращения спиральной волны при этом равна

$$\omega_* = \omega_0 + ak_*^2. \quad (1.204)$$

Следовательно, хотя частота вращения и зависит от конкретного вида уравнений автоколебательной распределенной среды, эта зависимость при $|a| \ll b$ является довольно слабой — от вида уравнений зависит лишь значение числового коэффициента ζ в (1.203). Благодаря этой универсальности можно ожидать, что выражения (1.203), (1.204), полученные выше лишь для случая квазигармонических автоколебаний, будут выполняться для произвольной автоколебательной среды в пределе $|a| \ll b$.

При увеличении параметра $|q|$ волновое число k_* генерируемых волн возрастает и становится порядка $L_{\text{диф}}^{-1}$. В этом режиме значения частоты вращения спиральной волны ω_* и волнового числа k_* существенно зависят от конкретного вида уравнений автоколебательной среды, а использованная выше процедура сшивки асимптотических разложений неприменима. Возможен только приближенный расчет [169] значений ω_* и k_* путем численного интегрирования уравнений (1.183), (1.184) с граничными условиями (1.185), (1.186).

Необходимо заметить, что при достаточно больших значениях q спиральные волны должны терять устойчивость. Действительно, на большом удалении от центра возникающая волновая картина имеет локально вид плоской фазовой волны с волновым числом k_* . С ростом параметра q волновое число k_* возрастает. Однако фазовые волны с достаточно большими волновыми числами неустойчивы; обычно это происходит при $k \sim 1/L_{\text{диф}}$. Следовательно, спиральные волны могут наблюдаться лишь в таких автоколебательных средах, где параметр $q = -a/b$ не слишком велик по модулю ($|q| \lesssim 1$). Например, для уравнения Гинзбурга–Ландау устойчивость фазовых волн теряется при выполнении неравенства

$$(kL_{\text{диф}}) > \frac{1}{\sqrt{3 + 2q^2}}. \quad (1.205)$$

Поэтому спиральные волны в среде, описываемой таким уравнением, существуют лишь при $q < 1,397 \dots$.

В [169] построены также решения для вращающихся спиральных волн, имеющих два или более рукава. Проведенный в [169] анализ показал, однако, что все такие режимы неустойчивы. Двухрукавная спиральная волна распадается на две спиральные волны с одним рукавом, и т. д.

Взаимодействие между спиральными волнами в автоколебательной распределенной среде рассматривали Я. Б. Зельдович и Б. А. Маломед [60]. Для автоколебательной среды, описываемой уравнением Гинзбурга–Ландау, при $D_2 = 0$ в пренебрежении нелинейным сдвигом частоты они обнаружили, что две спиральные волны отталкиваются друг от друга, если они вращаются в одинаковом направлении, и притягиваются, если их направления вращения противоположны.

Полученный результат позволяет доказать неустойчивость спиральной волны для ограниченной области, имеющей в сечении форму квадрата. В самом деле, эту квадратную область можно продолжить до бесконечной решетки; при этом решения в двух соседних областях получают одно из другого преобразованием зеркальной симметрии, т. е. направления вращения спиральных волн в соседних ячейках противоположны, вследствие чего вся эта система стремится аннигилировать. Аналогичное рассуждение доказывает неустойчивость отдельной спиральной волны в области, имеющей в сечении форму правильного треугольника. Однако для правильного шестиугольника оно, как легко понять из элементарного рассмотрения, уже не подходит. Это означает, что спиральные волны могут образовывать на плоскости устойчивую гексагональную решетку.

Хотя результаты Зельдовича и Маломеда, относящиеся к взаимодействию спиральных волн, были получены только для сред без нелинейного сдвига, где $q = 0$, можно ожидать, что они сохраняются также и для среды со слабым нелинейным сдвигом частоты ($q \ll 1$), если расстояние между центрами двух спиральных волн не слишком велико, а именно, если оно не превышает длины генерируемых фазовых волн $\lambda_* = 2\pi/k_*$. На больших удалениях взаимодействие между спиральными волнами должно быстро спадать.

13. Стационарные диссипативные структуры

Помимо рассмотренных автоволновых режимов, в распределенных активных средах наблюдаются также разнообразные стационарные диссипативные структуры, устойчивые по отношению к малым возмущениям.

Собственно говоря, с одним из примеров таких структур мы уже столкнулись в разделе 1.3 при изучении простых бистабильных сред, описываемых всего одной переменной. Как отмечалось в §3, при выполнении условия (1.41) межфазная граница, отделяющая области с двумя различными стационарными состояниями («фазами»), покоится. В результате среда разбивается на смесь доменов двух фаз.

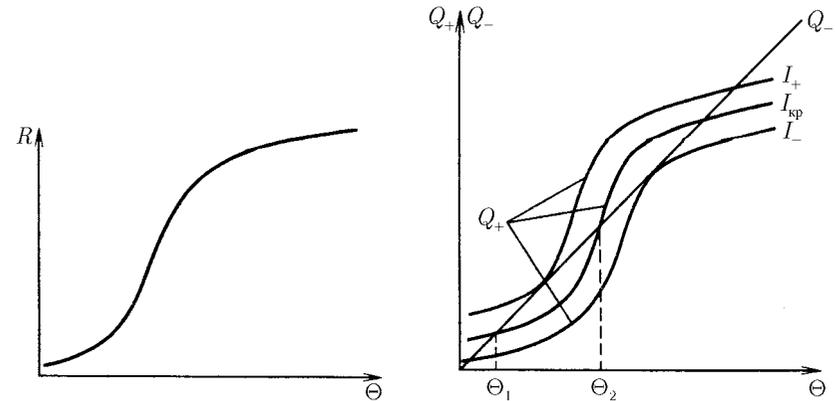


Рис. 1.51. Зависимость удельного сопротивления железной нити в атмосфере водорода от температуры нити

Рис. 1.52. Зависимость скоростей тепловыделения Q_+ и теплоотвода Q_- от температуры

Однако этот пример не вполне типичен. При выполнении условия равновесия фаз (1.41) размеры доменов произвольны, а следовательно формируемая ими пространственная структура не восстанавливается после возмущения, т. е. такая система находится в состоянии безразличного (или нейтрального) равновесия. Кроме того, само условие (1.41) выполняется лишь при определенном выборе параметров, характеризующих данную бистабильную среду. В общем случае граница между фазами не покоится, а смещается с течением времени. Направление и скорость ее движения зависят от значений параметров среды. Меняя эти параметры, можно управлять движением межфазных границ.

Устойчивую диссипативную структуру легче всего получить, предположив, что значения параметров не неизменны, а быстро подстраиваются к мгновенному положению межфазных границ. Иллюстрацией этого эффекта может служить теория барретирования, разработанная В. В. Барелко, Я. Б. Зельдовичем и др. [16].

Рассмотрим нагреваемую электрическим током железную нить, которая находится в атмосфере водорода. Экспериментально установлено, что удельное сопротивление R такой нити в расчете на единицу длины оказывается нелинейно зависящим от температуры. Как видно из рис. 1.51, функция $R = R(\Theta)$ довольно резко возрастает с увеличением температуры. Помимо выделения количества теплоты (тепловыделения) $Q_+ = I^2 R(\Theta)$,

где I — сила тока, идет также процесс теплообмена с окружающей средой, приводящий к потере количества теплоты (теплоотвода) $Q_- = \gamma(\Theta - \Theta_0)$. В этих условиях уравнение теплового баланса нити можно записать в виде

$$C \frac{\partial \Theta}{\partial t} = f(\Theta) + \chi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad (1.206)$$

где $f(\Theta) = Q_+ - Q_-$, C — теплоемкость нити в расчете на единицу ее длины, χ — теплопроводность.

Положим вначале, что сила тока I поддерживается постоянной. Тогда уравнение (1.206) совпадает со стандартным уравнением простой бистабильной среды (1.13). В интервале $I_+ > I > I_-$ система обладает двумя устойчивыми однородными состояниями (рис. 1.52), одно из которых характеризуется высокой ($\Theta = \Theta_3$), а второй — низкой ($\Theta = \Theta_1$) температурой нити. Эти два состояния можно рассматривать в качестве двух «фаз». В распределенной системе, описываемой уравнением (1.206), переход между стационарными состояниями может осуществляться путем распространения температурной волны, вытесняющей (в зависимости от значений параметров) высокотемпературный либо низкотемпературный режим. Как было показано в разделе 1.2, направление смещения границы между двумя областями определяется знаком интеграла

$$A = \int_{\Theta_1}^{\Theta_3} f(\Theta) d\Theta. \quad (1.207)$$

Если $A > 0$, волна движется в сторону заполнения нити высокотемпературным режимом $\Theta = \Theta_3$, тогда как при $A < 0$ низкотемпературный режим вытесняет высокотемпературный. Равенство $A = 0$ является критическим условием смены направления фронта, при котором скорость распространения волны обращается в нуль. Это условие отвечает стационарному состоянию систем, при котором на нити могут устойчиво и стационарно существовать зоны высокотемпературного и низкотемпературного режимов.

До сих пор рассматривался случай, когда нить питалась от регулируемого источника тока, поддерживающего силу тока I постоянной. Если же питание производится от регулируемого источника напряжения, т. е. поддерживается постоянной не сила тока I , а разность электрических потенциалов U на концах нити, то процесс характеризуется новыми качественными особенностями. В этом случае сила тока I является уже не постоянной, а переменной величиной, поскольку она, согласно закону Ома, зависит от пол-

ного сопротивления нити:

$$I = U \left[\int_{-L_0}^{L_0} R(\Theta(x)) dx \right]^{-1}, \quad (1.208)$$

где $2L_0$ — длина нити.

Пусть, например, сила тока I , текущего через нить, находящуюся в состоянии с температурой Θ_1 , превысила критическое значение $I_{кр}$, для которого $A = 0$. В этом случае при внесении в систему локального возмущения вдоль нити начинает распространяться волна и нить переходит в состояние с температурой Θ_3 . По мере расширения высокотемпературной зоны полное сопротивление нити возрастает, что приводит к снижению силы тока I и, следовательно, обуславливает монотонное падение A . Когда значение I упадет до $I_{кр}$, фронт прекратит свое движение. Таким образом, нить окажется разбитой на участок с высокой температурой Θ_3 и большим сопротивлением $R(\Theta_3)$ и участок с низкой температурой и малым сопротивлением $R(\Theta_1)$. При увеличении напряжения U будут меняться длины участков и, следовательно, полное сопротивление нити, но не изменится сила тока $I_{кр}$, при которой горячий и холодный участки сосуществуют. Поэтому, пока высокотемпературная зона не заполнит всю нить, система работает как стабилизатор тока, поддерживая его значение, равное $I_{кр}$. При уменьшении U осуществляется аналогичный процесс. Этот эффект лежит в основе действия технического устройства, называемого *бареттором*.

Пусть ширина высокотемпературного участка $2l_3$ гораздо больше толщины переходного слоя l_0 . Тогда силу тока, протекающего через нить, можно приближенно выразить как

$$I = \frac{U}{2(R_3 l_3 + R_1 l_1)}, \quad l_1 = L_0 - l_3, \quad (1.209)$$

где $R_3 = R(\Theta_3)$ и $R_1 = R(\Theta_1)$. Учитывая, что в стационарном режиме устанавливается критическое значение силы тока $I_{кр}$, находим из (1.209)

$$l_3 = \frac{1}{R_3 - R_1} \left(\frac{U}{2I_{кр}} - R_1 L_0 \right). \quad (1.210)$$

Таким образом, стационарная диссипативная структура — разогретая зона — возникает при $U > U_{\min}$, где $U_{\min} = 2L_0 R_1 I_{кр}$. С увеличением U ширина этой зоны растет, а при $U = U_{\max}$, где $U_{\max} = 2L_0 R_3 I_{кр}$, эта зона заполняет собой всю нить. При $U > U_{\max}$ устойчиво только однородное высокотемпературное состояние.

До сих пор мы предполагали, что на нити располагается всего один высокотемпературный участок. Ясно, однако, что все приведенные выше рассуждения сохраняют силу и в том случае, если горячих участков несколько, — необходимо лишь, чтобы их суммарная длина совпадала со значением l_3 , задаваемым выражением (1.210). Сколько будет наблюдаться высокотемпературных участков и где они будут расположены — зависит от начального условия, т. е. от того, в каких именно областях был произведен разогрев нити.

Несмотря на это, казалось бы, частный характер, рассмотренный нами пример иллюстрирует основные свойства стационарных диссипативных структур. Прежде всего, каждая такая структура — это устойчивое образование, форма и размеры которого восстанавливаются после малых возмущений. Можно сказать, что каждая стационарная диссипативная структура представляет собой одно из устойчивых стационарных состояний распределенной системы. Каждое устойчивое стационарное состояние характеризуется своей *областью притяжения* (все начальные распределения, попадающие в область притяжения стационарного состояния, релаксируют к нему со временем). Одна и та же распределенная система может обладать огромным числом различных стационарных структур. Какое именно из этих стационарных состояний осуществляется в эксперименте, зависит от начальных условий.

Главная предпосылка для возникновения стационарных диссипативных структур заключается в том, чтобы, помимо локального взаимодействия, элементы активной среды были бы охвачены также действующей обратной связью. В рассмотренном нами примере обратная связь осуществляется через изменение силы тока, которое определяется состоянием (температурой) всех элементов распределенной системы. Возможны, конечно, и другие механизмы, приводящие к аналогичному эффекту.

Пусть, например, в среде происходит горение некоторого вещества. Предположим, что коэффициент диффузии этого вещества превышает теплопроводность, так что за счет диффузии концентрация горючего вещества a во всех элементах среды поддерживается практически постоянной. Будем также считать, что горючее вещество непрерывно поступает в среду с постоянной скоростью Q . Уравнения, описывающие процесс горения в такой среде, имеют вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = aq(\Theta) - \gamma(\Theta - \Theta_0) + \chi \Delta \Theta, \quad \frac{da}{dt} = Q - a \int \tilde{q}(\Theta(r)) dr. \quad (1.211)$$

Здесь $q(\Theta)$ характеризует выделение теплоты в расчете на единицу массы

горючего вещества, а $\tilde{q}(\Theta)$ — скорость уменьшения этого вещества при горении. Поскольку процесс горения начинается лишь при достижении определенной температуры, обе эти функции имеют вид размытой ступеньки (рис. 1.8).

Уравнения (1.211) описывают образование стационарной диссипативной структуры. Действительно, предположим, что мы подожгли горючую смесь в некоторой малой области среды. Вначале зона горения будет расширяться. Но расширение зоны горения приведет к увеличению расхода горючего вещества, а следовательно, к понижению его концентрации a . В свою очередь, понижение a вызовет уменьшение скорости движения фронта горения. При достижении некоторого критического значения $a_{кр}$ фронт остановится. В результате в среде возникнет локализованный очаг горения — стационарная диссипативная структура.⁹ Заметим, что, как и в обсуждавшемся выше примере, в данном случае наблюдается *множественность* диссипативных структур. Вместо одного большого очага горения в среде может иметься несколько более мелких очагов с тем же суммарным расходом горючего. Расположение и число таких очагов определяются начальными условиями. Если очаги горения расположены не слишком далеко друг от друга, по сравнению с шириной фронта волны горения l_0 , между ними должно наблюдаться своеобразное взаимодействие: два расположенных поблизости очага притягиваются и стремятся слиться друг с другом.

Дальнейшая обратная связь может осуществляться также за счет хорошо диффундирующего ингибитора. В этом случае рост очага горения прекращается благодаря увеличению в среде концентрации ингибитора.

Приведенные простые примеры иллюстрируют главные механизмы, ведущие к образованию стационарных диссипативных структур. К настоящему времени имеется хорошо развитая математическая теория [72]–[83] стационарных диссипативных структур в реагирующих двухкомпонентных системах с диффузией, которые описываются уравнениями вида

$$\tau_u \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, v) + l^2 \Delta u, \quad \tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = g(u, v) + L^2 \Delta v. \quad (1.212)$$

Переменную u можно интерпретировать как концентрацию *активатора*, а переменную v — как концентрацию *ингибитора*. Нас сейчас интересуют

⁹Эти рассуждения предполагают, что горючее расходуется быстро по сравнению с характерными скоростями изменения температуры, а поэтому можно считать, что его концентрация a адиабатически подстраивается к мгновенному распределению температуры. В противном случае такая подстройка будет происходить с некоторым запаздыванием. Если запаздывание достаточно велико, оно может стать причиной незатухающих пульсаций зоны горения.

ситуации, когда коэффициент диффузии ингибитора значительно превышает коэффициент диффузии активатора ($L \gg l$), а изменения концентрации ингибитора происходят быстрее, чем изменения концентрации активатора ($\tau_v \ll \tau_u$). При этих условиях распределение ингибитора быстро подстраивается к мгновенному распределению активатора, оставаясь всегда достаточно плавным.

Свойства устанавливающихся в среде диссипативных структур существенно зависят от того, составлена ли данная активная среда из бистабильных, возбудимых или автоколебательных элементов.

1. Если среда составлена из бистабильных элементов, она разбивается на совокупность областей с размерами не меньше L , занятых двумя фазами, в которых состояние среды близко к одному из двух устойчивых состояний отдельно взятого элемента. Эти области отделены переходными слоями с шириной порядка l . Они могут иметь большие размеры: весь объем может, например, разбиться всего на две такие области с разными фазами. Кроме того, могут существовать также капли противоположной фазы с размером порядка l , вкрапленные в области постоянной фазы. Расстояние между каплями больше или порядка L .

2. Если среда составлена из возбудимых элементов, т. е. имеется всего одно однородное стационарное состояние покоя среды $u = u_0, v = v_0$ и оно устойчиво по отношению к малым возмущениям, то в одномерном случае стационарная диссипативная структура обычно представляет собой набор узких страт с шириной порядка l , расположенных на расстоянии порядка или более L друг от друга. В областях между стратами среда находится в состоянии, близком к состоянию покоя. Внутри страт резко меняется лишь концентрация активатора, тогда как распределение ингибитора является всюду плавным. Возможны локализованные диссипативные структуры, когда в длинном по сравнению с L отрезке расположены одна или несколько узких страт, разделенных промежутками порядка L , а в остальной области среда остается в состоянии покоя. В двумерных и трехмерных случаях диссипативная структура представляет собой совокупность малых капель с размером порядка l , разделенных расстояниями порядка или более L . В областях между каплями состояние среды близко к устойчивому одномерному состоянию. Исходя из однородного стационарного состояния, диссипативные структуры в таких средах можно создать лишь путем достаточно сильных начальных возмущений.

3. Если отдельно взятый элемент среды совершает периодические автоколебания, стационарное однородное состояние активной среды абсолютно неустойчиво. В ней возникают стационарные диссипативные структуры,

имеющие вид страт с длиной порядка L , отделенных переходными слоями с шириной порядка l . В двумерном и трехмерном случаях среда распадается на совокупность ячеек с размером порядка L , отделенных узкими переходными слоями. Локализованные стационарные структуры невозможны: ячейки заполняют весь объем среды.

Подчеркнем, что двухкомпонентные системы типа (1.212) допускают установление стационарных неоднородных структур при гораздо менее жестких ограничениях, чем однокомпонентные системы вида (1.13), где существование двух фаз возможно лишь при выполнении условия (1.41). Модели такого типа широко используются при изучении явления *морфогенеза*, т. е. позиционной дифференциации отдельных клеток в процессе индивидуального развития многоклеточного живого организма. Предполагается, что такая дифференциация обусловлена взаимодействием между клетками, осуществляемым посредством веществ двух типов — активаторов и ингибиторов, причем скорость диффузии ингибитора превышает скорость диффузии активатора. Устанавливающиеся стационарные неоднородные распределения этих двух веществ определяют структуру многоклеточного организма. Подробнее с этими вопросами можно ознакомиться в [20, 105, 127].

Заметим, наконец, что если условие $\tau_v \ll \tau_u$ нарушено и ингибитор обладает значительной инерционностью, картина явления может существенно измениться. Поскольку подстройка распределения ингибитора происходит теперь с некоторым запаздыванием, может возникнуть [77] режим осциллирующих диссипативных структур, параметры которых (например, ширина страт) периодически меняются со временем.

На этом мы заканчиваем рассмотрение явлений самоорганизации, связанных с образованием когерентных крупномасштабных структур в сильнонераспределенных средах. Разумеется, здесь у нас не было возможности подробнее остановиться на особенностях подобных структур в конкретных активных средах различного происхождения. Такой анализ должен быть предметом отдельного рассмотрения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Широкий круг вопросов, связанных с изучением автоволн и диссипативных структур в различных активных средах, рассмотрен в монографиях [37, 65, 69, 101, 105, 108, 119, 122, 126–128, 153, 192, 262, 266]. Имеется также ряд общих обзоров: [11, 20, 36, 39, 45, 46, 55, 59, 82, 98, 106, 132, 154]. В популярной форме эта проблемы обсуждаются в брошюрах [9, 87, 89, 93].

Конкретные модели различных активных сред приведены, например, в [10, 11, 15, 18, 42–44]. Большое число работ посвящено рассмотрению химических активных сред и в особенности среды с химической реакцией Белоусова–Жаботинского [27, 28, 54, 174, 198, 251, 252].

Существует обширная литература о волнах переключения в простых бистабильных системах. В первую очередь здесь необходимо отметить монографию [58] и подробный обзор [106]. Впервые волны переключения были рассмотрены в [62, 84, 155]. Различные задачи, возникающие в теории таких волн, изучаются в [19, 21, 45, 57, 125, 145, 146, 209]. В цикле работ [123, 124] и др. рассматриваются близкие вопросы образования пространственных нестационарных структур в средах с сильной нелинейной зависимостью теплопроводности от температуры или коэффициента диффузии от концентрации реагирующего вещества.

Подробный теоретический анализ механизмов, лежащих в основе распространения уединенных бегущих импульсов в возбудимых средах, проведен в [110, 140, 221, 222, 235] и [237]. Устойчивость и другие свойства бегущих импульсов изучались в [92, 131, 149, 151, 152, 199]. Бегущие импульсы в конкретных моделях возбудимых сред рассматривались в [76, 80, 150, 157, 229–231], стохастические последовательности бегущих импульсов — в [91].

Современные работы по использованию клеточных автоматов для моделирования волновых процессов в возбудимых средах восходят к статье [38], в которой была предложена так называемая аксиоматическая модель возбудимой среды и с ее помощью проанализирована циркуляция спи-

ральной волны вокруг отверстия. В ее рамках позднее было показано, что наличие отверстия не является необходимым условием [8, 46] и что спиральная волна может возникнуть из разрыва фронта в неоднородной по рефрактерности среде [85]. Различные модификации аксиоматической модели обсуждались в [41, 171, 232, 233, 271].

Спиральные волны в среде с химической реакцией Белоусова–Жаботинского были открыты в [56, 259]. Различные подходы к теоретическому описанию спиральных волн в возбудимых средах развивались в [46, 88, 111, 116, 118, 207, 226, 241]. Процессы взаимодействия спиральных волн между собой, а также с другими волновыми структурами в возбудимых средах изучались в [51, 52, 187, 240, 261]. Многообразные спиральные волны были обнаружены в экспериментах [86, 133]. Особой тщательностью и высокой техникой эксперимента выделяются исследования [211–214]. Результаты численного моделирования спиральных волн в возбудимых средах приведены в [65], а также в [66, 116, 227].

Кинематический подход был использован еще в 1951 г. при описании спирального роста кристалла вокруг винтовой дислокации [139]. Применительно к возбудимым средам этот подход был предложен в [63–65, 68]. При этом, однако, не учитывалась зависимость скорости прорастания от кривизны волнового фронта. Уравнения кинематики с учетом такой зависимости были получены в [31, 32, 46].

Вывод уравнений квазистационарного приближения дан в [30]. Обобщение кинематического подхода на случай трехмерных возбудимых сред проведено в [29]. Кинематический подход развивался также в цикле работ [178, 179, 255]. В указанных работах, однако, не рассматривалась динамика обрывов автоволнового фронта. Механизм возникновения спиральных волн из обрывов волнового фронта изучался в [112, 117]. Кинематический подход к описанию взаимодействий между бегущими импульсами в возбудимых средах развит в [210, 238].

Дрейф спиральных волн в неоднородных возбудимых средах изучался экспериментально в [242]; резонанс спиральных волн в светочувствительной возбудимой среде с реакцией Белоусова–Жаботинского был открыт в [2]. Простое качественное объяснение дрейфа спиральных волн предложено в [173]. Последовательная теория резонанса и дрейфа спиральных волн в возбудимых средах дана в [30].

Трехмерные вихри в химической среде с реакцией Белоусова–Жаботинского изучались в экспериментах [257, 260]. Численное моделирование сложных трехмерных автоволновых структур, а также рассмотрение отдельных теоретических вопросов, связанных с их описанием, предпринято в [113–115, 205, 208, 215, 224, 225, 274]. В [264, 267–270] дана подробная

классификация всех возможных трехмерных структур и сформулированы правила отбора для таких структур, основанные на некоторых топологических ограничениях (см. также [168]). Кинематическая теория вихревых колец в трехмерных возбудимых средах построена в [29]. В рамках кинематического подхода свойства скрученных вихрей и распространение волн скрученности изучались в [47].

Уравнения фазовой динамики для осциллирующих активных сред были выведены и изучались в [189, 191, 192]. Численные и аналитические исследования процессов, связанных с образованием регулярных или хаотических структур в осциллирующих активных средах, проводились в [4–7, 13, 14, 40, 59, 60, 96, 98, 107, 121, 122, 156, 160, 172, 176, 183, 200–203, 216–218, 220, 248, 256, 258, 260, 273]. Частота вращения и форма спиральной волны в осциллирующей активной среде были рассчитаны в работе [169] (см. также [97]). В выполненных ранее работах [59, 60, 107, 143, 147, 160, 161, 164, 165, 180, 181, 186] не удавалось правильно рассчитать частоту вращения спиральных волн (либо рассматривались лишь некоторые частные случаи осциллирующих сред, где спираль имеет особую вырожденную форму, а ее частота вращения совпадает с частотой однородных автоколебаний в такой среде).

Ведущие центры в среде с химической реакцией Белоусова–Жаботинского открыты в экспериментах [275, 276]. Длительное время считалось, что такие автоволновые структуры являются автономными и не связаны с наличием каких-либо неоднородностей или посторонних включений. Впоследствии было установлено [134, 254], что это не так: ведущие центры в среде с реакцией Белоусова–Жаботинского обусловлены присутствием примесей, локально переводящих среду в автоколебательный режим. Тем не менее имеется ряд теоретических моделей [90, 130, 182, 183, 219], объясняющих возникновение таких структур в однородных средах (при этом обычно остается открытым вопрос об устойчивости подобных структур). В [34] рассмотрена модель ведущих центров в трехкомпонентной активной среде. Теория пейсмекеров, основанная на уравнениях фазовой динамики, приведена в [192] (см. также [206]).

Стационарные диссипативные структуры в распределенных активных средах впервые рассматривались в [250]. Большой вклад в их изучение был внесен в работах И. Пригожина и его сотрудников (подробную библиографию см. в [108]). Различные вопросы, связанные с образованием и устойчивостью подобных структур, анализировались также в [12, 20, 22–24, 33, 35, 37, 49, 50, 71–76, 78, 79, 95, 103, 104, 120, 136–138, 141, 142, 152, 167].

Подробная классификация различных типов стационарных пульсирующих и бегущих структур в двухкомпонентных реагирующих системах

водниковой схемы осуществлена в [103]. Оптоэлектронная реализация этой модели ассоциативной памяти предложена в [82].

Метод имитации отжига для решения задач комбинаторной оптимизации был предложен в [158] (см. также [157, 201, 202]). Статистическая механика искусственных физических систем, ассоциированных с различными сложными задачами комбинаторной оптимизации, изучалась в [40, 44, 91, 159, 175, 176, 182, 187, 215, 220, 235]. Связь между задачами оптимизации и проблемой распознавания образов обсуждается в [112].

Общие теоретические вопросы, связанные с созданием распределенных обучающихся систем, рассматривались в [128, 130, 131, 207]. Метод обратного распространения ошибок [164, 203] был использован для создания обучающихся систем, способных, например, определять пространственную форму объектов по их теневому плоскому изображению [165] или распознавать цели по данным звуковой локации [104]. Подробное описание деталей этого метода, а также дальнейшие примеры можно найти в [207, 210, 225]. Оптическая реализация метода описана в [224]. Обучающаяся «машина Больцмана» [25, 81, 129] использовалась в таких задачах, как восприятие речи [200] или поиск фигуры на имеющемся фоне [154, 209]. Существуют специализированные электронные интегральные схемы для реализации «машины Больцмана» [26]. Некоторые другие подходы к созданию распределенных обучающихся систем излагаются в [27, 43, 94, 95, 101, 132, 133, 135, 219].

Использование систем с естественным отбором (с нелинейной конкуренцией мод) для задач распознавания образов рассматривалось в [6, 92, 93, 113–116]. В [147–149] было отмечено, что иммунную систему человека можно рассматривать в качестве примера обучающейся эволюционной системы. Независимо были предложены [135] математические схемы управляющих устройств, обучение которых осуществляется в процессе конкуренции и естественного отбора. В статье [83] показано, что эти математические схемы очень близки к моделям иммунной системы (см. также [226]). Самоконструирующиеся системы с реакциями и диффузией рассматривались в [83, 84]. Применение эволюционных систем для аналогового решения сложных задач комбинаторной оптимизации исследовалось в [46, 79, 80]. Роль реакционно-диффузионных явлений в процессах обработки информации живой клеткой обсуждалась в [17, 18].

В работах [53, 58, 143, 144, 178, 192] обсуждались вопросы, связанные с использованием графов при аналоговой обработке информации.

Литература

К главе 1

1. *Абрамычев А. Ю., Давыдов В. А., Михайлов А. С.* // Биофизика. 1989. Т. 35. С. 100.
2. *Агладзе К. И., Давыдов В. А., Михайлов А. С.* // Письма ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 601.
3. *Алдушин А. Л., Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.* // ДАН СССР, 1980. Т. 251. С. 1102–1106.
4. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 92–105.
5. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Розальский А. В., Сагдеев Р. З.* Решеточные модели в нелинейной динамике неравновесных сред: Препринт ИПФ АН СССР. №163. – Горький, 1987. 24 с.
6. *Арансон И. С., Рабинович М. И.* // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1986. Т. 29. С. 1514–1517.
7. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А.* // ДАН СССР. 1984. Т. 274. С. 1091–1095.
8. *Балаховский И. С.* // Биофизика. 1965. Т. 10. С. 1063–1069.
9. *Балкарей Ю. И., Голик Л. Л., Елинсон М. И.* Автоволновые среды (использование в электронике). – М.: Знание, 1985. 64 с.
10. *Балкарей Ю. И., Елинсон М. И., Никулин М. Г.* // Проблемы современной радиотехники и электроники. – М.: Наука, 1980. С. 431.
11. *Балкарей Ю. И., Елинсон М. И., Никулин М. Г.* // Автоволновые процессы в системах с диффузией. – Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 117–134.
12. *Балкарей Ю. И., Евтихов М. Г., Елинсон М. И.* // Микроэлектроника. 1980. Т. 9. С. 144–156.

13. Балкарей Ю. И., Никулин М. Г. // ЖТФ. 1979. Т. 49. 231–239.
14. Балкарей Ю. И., Никулин М. Г. // ЖТФ. 1979. Т. 49. С. 224–229.
15. Балкарей Ю. И., Ржанов Ю. А., Голик Л. Л., Елинсон М. И. // ФТП. 1982. Т. 16. С. 1558–1565.
16. Барелко В. В., Бейбутян В. М., Володин Ю. В., Зельдович Я. Б. // ДАН, СССР. 1981. Т. 257, С. 339–344.
17. Барелко В. В., Бейбутян В. М., Володин Ю. В., Зельдович Я. Б. // Автоволновые процессы в системах с диффузией. – Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 135–148.
18. Барелко В. В., Володин Ю. И. // ДАН СССР. 1975. Т. 223. С. 112–115.
19. Баренблатт Г. И., Зельдович Я. Б. // ПММ. 1957. Т. 21. С. 856–859.
20. Белинцев Б. Н. // УФН, 1983. Т. 141. С. 55–101.
21. Белинцев Б. Н., Дибров Б. Ф., Ливищ М. А., Волькенштейн М. В. // Биофизика. 1978. Т. 23. С. 864–869.
22. Белинцев Б. Н., Ливищ М. А., Волькенштейн М. В. // Биофизика. 1978. Т. 23. С. 1056–1062.
23. Белинцев Б. Н., Ливищ М. А., Волькенштейн М. В. // ДАН СССР. 1981. Т. 257. С. 487–491.
24. Белинцев Б. Н., Ливищ М. А., Волькенштейн М. В. // Биофизика. 1982. Т. 27. С. 293–296.
25. Белинцев Б. Н., Савич Д. // Биофизика. 1985. Т. 30. С. 284–291.
26. Белинцев Б. Н., Юдин И. Д., Волькенштейн М. В. // ДАН СССР. 1985. Т. 285. С. 470–474.
27. Белоусов Б. П. // Сб. рефератов по радиационной медицине за 1958 г. – М.: Медгиз, 1959. С. 145.
28. Белоусов Б. П. // Автоволновые процессы в системах с диффузией. – Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 176–189.
29. Бражник П. К., Давыдов В. А., Зыков В. С., Михайлов А. С. // ЖЭТФ. 1987. Т. 93. С. 1725–1736.

30. Бражник П. К., Давыдов В. А., Зыков В. С., Михайлов А. С. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1988. Т. 31, №5. С. 574–584.
31. Бражник П. К., Давыдов В. А., Михайлов А. С. // Кинетика и горение. – Филиал Института химической физики АН СССР, Черноголовка. 1986. С. 39–43.
32. Бражник П. К., Давыдов В. А., Михайлов А. С. // Теор. мат. физ. 1987. Т. 74. С. 440–447.
33. Васильев В. А. Термодинамика биологических процессов. – М.: Наука, 1980. С. 186–192.
34. Васильев В. А., Полякова М. С. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ. и астроном. 1975. Т. 16. С. 99–104.
35. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Чернавский Д. С. Математическая биология развития. – М.: Наука, 1982. С. 82–101.
36. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. // УФН. 1979. Т. 128. С. 625–666.
37. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г. Автоволновые процессы. – М.: Наука, 1987. 240 с.
38. Винер Н., Розенблют А. // Кибернетический сборник, вып. 3, М.: ИЛ, 1961. С. 3–56.
39. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. – М.: Наука, 1987. С. 37–44.
40. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1987. Т. 30. С. 131–143.
41. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. // ДАН СССР. 1960. Т. 131. С. 1242–1245.
42. Голубев В. Н., Рабинович М. И., Таланов В. И. и др. // Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 42. С. 84–87.
43. Гренадер А. К., Панфилов А. В. // Биофизика. 1981. Т. 26. С. 1107–1108.
44. Гуляев Ю. В., Балкарей Ю. И. и др. // ДАН СССР. 1981. Т. 260. С. 82–85.
45. Гуревич А. В., Минц Р. Г. // УФН. 1984. Т. 142. С. 61–98.

46. *Давыдов В. А., Михайлов А. С.* // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. – М.: Наука, 1987. С. 261–279.
47. *Давыдов В. А., Михайлов А. С., Бражник П. К.* // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1989. Т. 32. №3. С. 289–293.
48. *Езерский А. Б., Коротин П. И., Рабинович М. И.* // Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41.
49. *Еленин Г. Г., Крылов В. В., Полежаев А. А., Чернавский Д. С.* // ДАН СССР. 1983. Т. 271. С. 84–88.
50. *Елюхин В. А.* // Биофизика. 1979. Т. 24. С. 1085–1089.
51. *Ермакова Е. А., Кринский В. И., Панфилов А. В., Перцов А. М.* // Биофизика. 1986. Т. 31. С. 855–861.
52. *Ермакова Е. А., Перцов А. М.* // Биофизика. 1986. Т. 31. С. 855–861.
53. *Жаботинский А. М.* // Колебательные процессы в биологических и химических системах. – М.: Наука, 1967. С. 252–254.
54. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания. – М.: Наука, 1974. 178 с.
55. *Жаботинский А. М.* // Нелинейные волны. Самоорганизация. – М.: Наука, 1983. С. 16–25.
56. *Жаботинский А. М., Заикин А. Н.* // Колебательные процессы в биологических и химических системах. – НЦБИ АН СССР. Пущино, 1971. С. 314–317.
57. *Жуков С. А., Барелко В. В., Мержанов А. Г.* // ДАН СССР. 1979. Т. 245. С. 94–98.
58. *Зельдович Я. Б., Баренблатт Г. И., Либрович В. Б., Махвиладзе Г. М.* Математическая теория горения и взрыва. – М.: Наука, 1980. 478 с.
59. *Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.* // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1982. Т. 25. С. 591–618.
60. *Зельдович Я. Б., Маломед Б. А.* // ДАН СССР. 1980. Т. 254. С. 92–94.
61. *Зельдович Я. Б., Михайлов А. С.* // УФН. 1987. Т. 153. С. 470–496.

62. *Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.* // ЖЭХ. 1938. Т. 12. С. 100–105.
63. *Зыков В. С.* // Биофизика. 1980. Т. 25. С. 888–892.
64. *Зыков В. С.* // Биофизика. 1980. Т. 25. С. 319–322.
65. *Зыков В. С.* Моделирование волновых процессов в возбудимых средах. – М.: Наука, 1984. 165 с.
66. *Зыков В. С.* // Биофизика. 1986. Т. 31. С. 862–865.
67. *Зыков В. С., Михайлов А. С.* // ДАН СССР. 1986. Т. 286. С. 341–344.
68. *Зыков В. С., Морозова О. Л.* // Биофизика. 1980. Т. 25. С. 1071–1076.
69. *Иваницкй Г. Р., Кринский В. И., Сельков К. Е.* Математическая биофизика клетки. – М.: Наука, 1978. 300 с.
70. *Ивлева Т. П., Мержанов А. Г., Шкадинский К. Г.* // Физика горения и взрыва. 1980. Т. 16. С. 3–14.
71. *Калафати Ю. Д., Сербинов И. А., Рябова Л. А.* // ДАН СССР. 1982. Т. 263. С. 862–864.
72. *Кернер Б. С., Кузнецов Е. М., Осипов В. В.* // ДАН, 1984. Т. 277. С. 1114–1118.
73. *Кернер Б. С., Кузнецов Е. М., Осипов В. В.* // Микроэлектроника. 1984. Т. 13. С. 407–426.
74. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // ЖЭТФ. 1978. Т. 74. С. 1675–1697.
75. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // ЖЭТФ. 1980. Т. 79. С. 2218–2238.
76. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // Микроэлектроника. 1981. Т. 10. С. 407–432.
77. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. С. 2201–2214.
78. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // ДАН СССР. 1982. Т. 264. С. 1366–1370.
79. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // ДАН СССР. 1983. Т. 270. С. 1104–1108.
80. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // Микроэлектроника. 1983. Т. 12. С. 512–529.
81. *Кернер Б. С., Осипов В. В.* // Письма ЖЭТФ. 1985. Т. 41. С. 386–388.

82. Кернер Б. С., Осипов В. В. // Микроэлектроника. 1985. Т. 14. С. 389–407.
83. Кернер Б. С., Осипов В. В. // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 589–607.
84. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. // Бюл. МГУ. Секция «Математика и механика». 1937. Т. 1. С. 1–26.
85. Кринский В. И. // Проблемы кибернетики. 1968. Вып. 20. С. 59–80.
86. Кринский В. И., Агладзе К. И. // ДАН СССР. 1982. Т. 263. С. 335–337.
87. Кринский В. И., Медвинский А. Б., Панфилов А. В. Эволюция автоволновых вихрей. – М.: Знание, 1986. 48 с.
88. Кринский В. И., Михайлов А. С. и др. // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика». 1984. Т. 27. С. 1116–1129.
89. Кринский В. И., Михайлов А. С. Автоволны. – М.: Знание, 1984. 64 с.
90. Кринский В. И., Холопов А. В. // Биофизика. 1967. Т. 12. С. 224–529.
91. Кузнецов Ю. А., Панфилов А. В. Стохастические волны в системе Фитц–Хью–Нагумо. – Препринт НЦБИ АН СССР. Пущино, 1981. 8 с.
92. Кузнецов Ю. А. Существование и устойчивость бегущих волн в системах «реакция–диффузия» с одной пространственной переменной. – Препринт НЦБИ АН СССР. Пущино, 1982. 40 с.
93. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы. – М.: Знание, 1983. 64 с.
94. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
95. Лившиц М. А. // Биофизика. 1984. Т. 29. С. 699–705.
96. Маломед Б. А. // ЖТФ. 1981. Т. 51. С. 2476–2482.
97. Маломед Б. А. // ДАН СССР. 1986. Т. 291. С. 327–332.
98. Маломед Б. А. // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. – М.: Наука, 1987. С. 251–261.
99. Маломед Б. А., Руманов Э. Н. // ДАН СССР. 1985. Т. 284. С. 1355–1359.
100. Маломед Б. А., Трибельский М. И. // ДАН СССР. 1984. Т. 275. С. 1363–1367.

101. Маркин В. С., Пастушенко В. Ф., Чизмаджев Ю. А. Теория возбудимых сред. – М.: Наука, 1981. 273 с.
102. Маркман Г. С. // Биофизика. 1980. Т. 25. С. 713–715.
103. Маркман Г. С. // Биофизика. 1980. Т. 25. С. 697–699.
104. Маркман Г. С., Уринцев А. Л. // Биофизика. 1980. Т. 25. С. 697–699.
105. Марри Д. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии: Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. 212 с.
106. Мержанов А. Г., Руманов Э. Н. // УФН. 1987. Т. 151. С. 553–593.
107. Михайлов А. С., Упоров И. В. // ДАН СССР. 1979. Т. 249. С. 733–736.
108. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. 308 с.
109. Николис Г. Динамика иерархических систем. – М.: Мир, 1989. 486 с.
110. Островский Л. А., Яхно В. Г. // Биофизика. 1975. Т. 20. С. 489–496.
111. Панфилов А. В., Морнев О. Л., Цыганов М. А., Кринский В. И. // Биофизика. 1982. Т. 27. С. 1064–1069.
112. Панфилов А. В., Перцов А. М. // Биофизика. 1982. Т. 27. С. 886–889.
113. Панфилов А. В., Перцов А. М. // ДАН СССР. 1984. Т. 274. С. 1500–1503.
114. Панфилов А. В., Руденко А. В., Кринский В. И. // Биофизика. 1982. Т. 27. С. 886.
115. Панфилов А. В., Руденко А. В., Винфри А. Т. // Биофизика. 1985. Т. 30. С. 464–466.
116. Перцов А. М., Панфилов А. В. // Автоволновые процессы в системах с диффузией. – Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 77–84.
117. Перцов А. М., Панфилов А. В., Медведева Ф. У. // Биофизика. 1983. Т. 28. С. 100–102.
118. Петвиашвили В. И., Сергеев А. М. // ДАН СССР. 1984. Т. 276. С. 1380–1384.

119. *Полак Л. С., Михайлов А. С.* Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. – М.: Наука, 1983. 286 с.
120. *Полежаев А. А.* // Биофизика, 1983.
121. *Романовский Ю. М.* // Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1972. Т. 15. С. 718–722.
122. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика. – М.: Наука, 1984. 304 с.
123. *Самарский А. А., Еленин Г. Г. и др.* // ДАН СССР. 1977. Т. 237. С. 1330–1337.
124. *Самарский А. А., Змитренко Н. В. и др.* // ДАН СССР. 1976. Т. 227. С. 321–324.
125. *Свирижев Ю. М., Гигаури А. А., Разжевайкин В. Н.* // Нелинейные волны. Самоорганизация. – М.: Наука, 1983. С. 32–47.
126. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Сов. Радио, 1977. 322 с.
127. *Хакен Г.* Синергетика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. 404 с.
128. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. – М.: Мир, 1979. 278 с.
129. *Юдин И. Д., Белинцев Б. Н., Лившиц М. А. и др.* // ДАН СССР. 1984. Т. 277. С. 987–991.
130. *Яхно В. Г.* // Биофизика. 1975. Т. 20. С. 669–675.
131. *Яхно В. Г.* // Биофизика. 1976. Т. 21. С. 547–552.
132. *Яхно В. Г.* // Автоволновые процессы в системах с диффузией. – Горький: ИПФ АН СССР, 1981. С. 46–76.
133. *Agladze K. I., Krinsky V. I.* // Nature. 1982. V. 296. P. 424–426.
134. *Agladze K. I., Krinsky V. I.* // Self-Organization: Autowaves and Structures far from Equilibrium / Ed. V. I. Krinsky. – Berlin: Springer, 1984. P. 147–149.
135. *Agladze K. I., Krinsky V. I., Pertsov A. M.* // Nature. 1984. V. 308. P. 834–835.

136. *Belintsev B. N., Livshits M. A., Volkenstein M. V.* // Z. Phys. 1978. V. 30B. P. 211–218.
137. *Belintsev B. N., Livshits M. A., Volkenstein M. V.* // Z. Phys. 1981. V. 44B. P. 345–351.
138. *Belintsev B. N., Livshits M. A., Volkenstein M. V.* // Phys. Lett. 1981. V. 82A. P. 375–377.
139. *Burton W. K., Cabrera N., Frank F. C.* // Phil. Trans. Roy. Soc. 1951. V. 243. P. 299–312.
140. *Casten R. C., Cohen H., Lagerstrom P. A.* // Quart. Appl. Math. 1975. V. 32. P. 365–381.
141. *Chernavskii D. S., Ruijgrok T. W.* // J. Theor. Biol. 1978. V. 73. P. 585–607.
142. *Chernavskii D. S., Ruijgrok T. W.* // BioSystems 1982. V. 15. P. 75–81.
143. *Cohen D. S., Neu J. C., Rosales R. R.* // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 35. P. 536–549.
144. *Duffy M. R., Britton N. F., Murray J. D.* // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. P. 8–13.
145. *Engel A.* // Phys. Lett. 1985. V. 113A. P. 139–142.
146. *Engel A., Ebeling W., Feistel R., Schimansky-Geier L.* // Selforganization by Nonlinear Irreversible Processes / Eds W. Ebeling, H. Ulbricht. – Berlin: Springer, 1986. P. 110–117.
147. *Erneux T., Herchkowitz-Kaufman M.* // Bull. Math. Biol. 1979. V. 41. P. 767–782.
148. *Feeney R., Schmidt S. L., Ortoleva P.* // Physica. 1981. V. 2D. P. 536–547.
149. *Feroe J. A.* // Biophys. J. 1978. V. 21. P. 103–110.
150. *Field R. J., Troy W. C.* // SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 37. P. 561–589.
151. *Fife P. C.* // SIAM-AMS Proceedings. 1976. V. 10. P. 23.
152. *Fife P. C.* // J. Chem. Phys. 1976. V. 14. P. 554–561.
153. *Fife P. C.* Mathematical Aspects of Reacting and Diffusing Systems. – Berlin: Springer, 1979 (Lecture Notes in Biomathematics, №28).

154. *Fife P. C.* // Non-Equilibrium Dynamics in Chemical Systems // Eds C. Vidal, A. Pacault. – Berlin: Springer, 1984. P. 76–88.
155. *Fisher P.* // Ann. Eugenics. 1937. V. 7. P. 335–367.
156. *Fujii H., Sawada Y.* // J. Chem. Phys. 1978. V. 69. P. 3830–3842.
157. *Gibbs R. G.* // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. P. 422–444.
158. *Glendinning P.* // Phys. Lett. 1987. V. 121A. P. 411–413.
159. *Gomatam J.* // J. Phys. 1982. V. 15A. P. 1463–1471.
160. *Greenberg J. M.* // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 30. P. 199–215.
161. *Greenberg J. M.* // SIAM J. Appl. Math. 1976. V. 30. P. 421–433.
162. *Greenberg J. M., Hastings S. P.* // SIAM J. Appl. Math. 1978. V. 34. P. 515–523.
163. *Greenberg J. M., Hassard B. D., Hastings S. P.* // Bull. Amer. Math. Soc. 1978. V. 84. P. 1296–1327.
164. *Greenberg J. M.* // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39. P. 301–309.
165. *Greenberg J. M.* // Adv. Appl. Math. 1981. V. 2. P. 450–462.
166. *Guckenheimer J.* // J. Math. Biol. 1975. V. 1. P. 259–271.
167. *Gurija G. T., Livshits M. A.* // Z. Phys. 1982. V. 47B. P. 71–77.
168. *Gurija G. T., Livshits M. A.* // Phys. Lett. 1983. V. 97A. P. 175–177.
169. *Hagan P. S.* // SIAM J. Appl. Math. 1982. V. 42. P. 762–781.
170. *Hastings S. P.* // Stud. Appl. Math. 1976. V. 55. P. 293–312.
171. *Hastings S. P.* // J. Math. Biol. 1981. V. 11. P. 105–117.
172. *Howard L. N., Koppell N.* // Stud. Appl. Math. 1977. V. 56. P. 95–111.
173. *Hramov R. N., Rudenko A. N., Panfilov A. V., Krinsky V. I.* // Studia Biophys. 1984. V. 102. P. 69–74.
174. *Karfunkel H. R., Seelig F. F.* // J. Math. Biol. 1975. V. 2. P. 123–135.
175. *Karfunkel H. R., Kahlert C.* // J. Math. Biol. 1977. V. 4. P. 183–192.

176. *Katon K.* // J. Phys. 1986. V. 19A. P. L1063–L1064.
177. *Keener J. P.* // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39. P. 528–548.
178. *Keener J. P.* // SIAM J. Appl. Math. 1986. V. 46. P. 1039–1056.
179. *Keener J. P., Tyson J. J.* // Physica. 1986. V. 21D. P. 300–324.
180. *Koga S.* // Prog. Theor. Phys. 1982. V. 67. P. 164–178.
181. *Koga S.* // Prog. Theor. Phys. 1982. V. 67. P. 454–463.
182. *Kopell N., Howard L. N.* // Science. 1973. V. 180. P. 1171–1173.
183. *Kopell N., Howard L. N.* // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 291–312.
184. *Kopell N., Howard L. N.* // Adv. Appl. Math. 1981. V. 2. P. 417–449.
185. *Kopell N., Howard L. N.* // Stud. Appl. Math. 1981. V. 64. P. 1–56.
186. *Krinsky V. I., Malomed B. A.* // Physica. 1983. V. 9D. P. 81–95.
187. *Krinsky V. I., Agladze K. I.* // Physica. 1983. V. 8D. P. 50–56.
188. *Kuhnert L.* // Nature. 1986. V. 6. P. 393–395.
189. *Kuramoto Y.* // Prog. Theor. Phys. Suppl. 1978. V. 64. P. 346–359.
190. *Kuramoto Y.* // Prog. Theor. Phys. 1980. V. 63. P. 1885–1895.
191. *Kuramoto Y.* // Physica. 1981. V. 106A. P. 128–133.
192. *Kuramoto Y.* Chemical Oscillations, Waves and Turbulence. – Berlin: Springer, 1984. 424 p.
193. *Kuramoto Y., Koga S.* // Prog. Theor. Phys. 1981. V. 66. P. 1081–1093.
194. *Kuramoto Y., Yamada T.* // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 55. P. 2035–2042.
195. *Langer J. C.* // Rev. Mod. Phys. 1980. V. 52. P. 1–28.
196. *Lefever R.* // J. Chem. Phys. 1968. V. 49. P. 4977–4978.
197. *Livshits M. A.* // Z. Phys. 1983. V. 53B. P. 83–88.
198. *Madore B. F., Freedman W. L.* // Science. 1983. V. 222. P. 615–616.

199. *Maginu K.* // J. Math. Biol. 1978. V. 6. P. 49–57.
200. *Malomed B. A.* // Physica. 1983. V. 8D. P. 353–359.
201. *Malomed B. A.* // Z. Phys. 1984. V. 55B. P. 241–248; P. 249–256.
202. *Malomed B. A., Staroselsky I. E.* // Phys. Lett. 1983. V. 99A. P. 145–146.
203. *Malomed B. A., Tribelsky M. I.* // Physica. 1984. V. 14D. P. 67–87.
204. *Markstein G. H.* // J. Aeronaut. Sci. 1951. V. 18. P. 199–207.
205. *Medvinsky A. B., Panfilov A. V., Pertsov A. M.* // Self-Organization: Autowaves and Structures far from Equilibrium / Ed. V.I. Krinsky. – Berlin: Springer, 1984. P. 195–199.
206. *Mikhailov A. S., Engel A.* // Phys. Lett. 1986. V. 117A. P. 257–260.
207. *Mikhailov A. S., Krinsky V. I.* // Physica. 1983. V. 9D. P. 346–376.
208. *Mikhailov A. S., Panfilov A. V., Rudenko A. N.* // Phys. Lett. 1985. V. 109A. P. 246–250.
209. *Mikhailov A. S., Schimansky-Geier L., Ebeling W.* // Phys. Lett. 1983. V. 96A. P. 453–456.
210. *Miller R. N., Rinzel J.* // Biophys. J. 1981. V. 34. P. 227–259.
211. *Muller S. L., Plessner T., Hess B.* // Science. 1985. V. 230. P. 661–663.
212. *Muller S. L., Plessner T., Hess B.* // Naturwiss. 1986. V. 73. P. 165–179.
213. *Muller S. L., Plessner T., Hess B.* // Physica. 1987. V. 24D. P. 71–86.
214. *Muller S. L., Plessner T., Hess B.* // Physica. 1987. V. 24D. P. 87–96.
215. *Nandapurkar P. J., Winfree A. T.* // Physica. 1987. V. 29D. P. 69–83.
216. *Neu J. C.* // SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 36. P. 509–514.
217. *Neu J. C.* // SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 37. P. 307–317.
218. *Neu J. C.* // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 38. P. 305–309.
219. *Ortoleva P.* // J. Chem. Phys. 1978. V. 69. P. 300–307.
220. *Ortoleva P., Ross J.* // J. Chem. Phys. 1973. V. 58. P. 5673–5691.

221. *Ortoleva P., Ross J.* // J. Chem. Phys. 1974. V. 60. P. 5090–5099.
222. *Ortoleva P., Ross J.* // J. Chem. Phys. 1975. V. 63. P. 3398–3431.
223. *Panfilov A. V., Rudenko A. N., Pertsov A. M.* // Self-Organization: Autowaves and Structures far from Equilibrium / Ed. V.I. Krinsky. – Berlin: Springer, 1984. P. 103–105.
224. *Panfilov A. V., Rudenko A. N.* // Physica, 1987. V. 28D. P. 215–218.
225. *Panfilov A. V., Winfree A. T.* // Physica. 1985. V. 17D. P. 323–330.
226. *Pertsov A. M., Ermakova E. A., Panfilov A. V.* // Physica. 1984. V. 14D. P. 117–124.
227. *Pertsov A. M., Panfilov A. V., Ermakova E. A.* // Physica. 1984. V. 14D. P. 311–328.
228. *Prigogine I., Lefever R.* // J. Chem Phys. 1968. V. 49. P. 283–292.
229. *Rajagopal K.* // Phys. Lett. 1983. V. 99A. P. 261–264.
230. *Rajagopal K.* // Phys. Lett. 1984. V. 100A. P. 269–272.
231. *Rajagopal K.* // Phys. Lett. 1984. V. 100A. P. 49–51.
232. *Reshodko L. V.* // J. Gen. Biol. 1973. V. 1. P. 80–87.
233. *Reshodko L. V., Bures J.* // Biol. Cybern. 1975. V. 18. P. 181–189.
234. *Richter P. H., Procaccia I., Ross J.* // Adv. Chem. Phys. 1980. V. 43. P. 217–285.
235. *Rinzel J.* // J. Math. Biol. 1975. V. 2. P. 205–224.
236. *Rinzel J., Elmentrout G. B.* // J. Chem. Phys. 1982. V. 86. P. 2954–2967.
237. *Rinzel J., Keller J. B.* // Biophys. J. 1973. V. 13. P. 1313–1337.
238. *Rinzel J., Maginu K.* // Non-Equilibrium Dynamics in Chemical Systems. / Eds. C. Vidal, A. Pacault. – Berlin: Springer, 1984. P. 107–113.
239. *Rosenblueth A.* // Amer. J. Physiol. 1958. V. 194. P. 491–508.
240. *Rossler O. E., Kahlert C.* // Z. Naturforsch. 1979. Bd 34. S. 565–573.

241. *Rovinsky A. B.* // J. Phys. Chem. 1986. V. 90. P. 217–219.
242. *Rudenko A. N., Panfilov A. V.* // Studia Biophys. 1983. V. 98. P. 183–188.
243. *Schlogl F. Z.* // Z. Phys. 1971. Bd. 243. S. 303–313.
244. *Schmidt S., Ortoleva P.* // J. Chem. Phys. 1980. V. 72. P. 2733–2742.
245. *Selfridge O.* // Arch. Inst. Cardiol. Mech. 1948. V. 53. P. 113–121.
246. *Shinomoto S., Kuramoto Y.* // Prog. Theor. Phys. 1986. V. 75. P. 1105–1110.
247. *Shyldkrot H., Ross J.* // J. Chem. Phys. 1985. V. 82. P. 113–122.
248. *Sivashinsky G. I.* // Ann. Rev. Fluid Mech. 1983. V. 15. P. 179–199.
249. *Sultan R., Ortoleva P.* // J. Chem. Phys. 1986, V. 84. P. 6781–6789.
250. *Turing A. M.* // Phil. Trans. Roy. Soc. 1952. V. 237. P. 37–72.
251. *Tyson J. J.* The Belousov–Zhabotinsky Reaction. – Berlin: Springer, 1976. 150 p. (Lecture Notes in Biomathematics, V. 10).
252. *Tyson J. J.* // Ann. N.Y. Acad. Sci. 1979. V. 316. P. 279–295.
253. *Tyson J. J.* // J. Chem. Phys. 1984. V. 80. P. 6079–6982.
254. *Tyson J. J., Fife P. C.* // J. Chem. Phys. 1980. V. 73. P. 2224–2236.
255. *Tyson J. J., Keener J. P.* // Physica D. 1987. V. 29D. P. 215–222.
256. *Walgraef D., Dewel G., Borckmans P.* // J. Chem. Phys. 1983. V. 78. P. 3043–3051.
257. *Welsh B. J., Gomati J., Burgess A. E.* // Nature. 1983. V. 304. P. 611–614.
258. *Winfree A. T.* // J. Theor. Biol. 1967. V. 16. P. 15–31.
259. *Winfree A. T.* // Science. 1972. V. 175. P. 634–640.
260. *Winfree A. T.* // Farad. Symp. Chem. Soc. 1974. V. 9. P. 38–41.
261. *Winfree A. T.* // Sci. Amer. 1974. V. 230. P. 82–95.
262. *Winfree A. T.* // The Geometry of Biological Time. – Berlin: Springer, 1980.
263. *Winfree A. T.* // Sci. Amer. 1983. V. 248. P. 144–161.

264. *Winfree A. T.* // Physica. 1984. V. 12D. P. 321–332.
265. *Winfree A. T.* The Timing of Biological Clocks. – N.Y.: Sci. Amer. Books, 1986.
266. *Winfree A. T.* When Time Breaks Down. – N.Y.: Princeton Univ. Press, 1987.
267. *Winfree A. T., Strogatz S. H.* // Physica. 1983. V. 9D. P. 35–49.
268. *Winfree A. T., Strogatz S. H.* // Physica. 1983. V. 9D. P. 65–80.
269. *Winfree A. T., Strogatz S. H.* // Physica. 1983. V. 9D. P. 333–345.
270. *Winfree A. T., Strogatz S. H.* // Physica. 1983. V. 13D. P. 221–233.
271. *Winfree A. T., Winfree E. M., Seifert H.* // Physica. 1985. V. 17D. P. 109–131.
272. *Wood P. M., Ross J.* // J. Chem. Phys. 1985. V. 82. P. 1924–1936.
273. *Yakhot V.* // Phys. Rev. 1981. V. 24A. P. 642–652.
274. *Yakushevich L. V.* // Studia Biophys. 1984. V. 100. P. 195–200.
275. *Zaikin A. N., Zhabotinsky A. M.* // Nature. 1970. V. 225. P. 535–538.
276. *Zhabotinsky A. M., Zaikin A. N.* // J. Theor. Biol. 1973. V. 40. P. 45–61.