

ЛОСКУТОВ А. Ю., БРЕДИХИН А. А.

**К ПРОБЛЕМЕ ОПИСАНИЯ
ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ. III.
ARCH-МОДЕЛИ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ РОССИИ**

Изучается возможность применения идей авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH) (т.е. зависимости значений временного финансового ряда от его предыдущих значений при изменении дисперсии во времени) к финансовому рынку России. В первой части работы предложено теоретическое объяснение возникновения и распространенности явлений ARCH на финансовых рынках. Во второй части выявлены ARCH-модели, возникающие на некоторых финансовых рынках России и произведена оценка параметров этих моделей.

Идентифицированы системы, описывающие динамику курса доллара на ММВБ с июня 1993 г. по 11 октября 1994 г. («черный вторник») и с «черного вторника» по октябрь 1995 г.

Ключевые слова: ARCH-модели, временные ряды, валютный рынок России.

§ 1. Введение

Анализ временных рядов представляет собой популярный и активно развивающийся раздел математических методов экономики. Во-первых, он дает возможность выявить существо глубинных экономических процессов, зачастую скрытых и неявных. Во-вторых, его применение позволяет перевести субъективные и интуитивные суждения на строгий язык цифр и фактов. Наконец, анализ временных рядов предоставляет возможность с некоторой степенью точности заглянуть в будущее, осуществить прогнозирование развития ситуации. При этом представляет самостоятельный интерес вопрос о точности такого прогноза.

С математической точки зрения прогноз, как правило, представляет собой оценку некоторой случайной величины или случайного вектора. Эта оценка может определяться по-разному: как математическое ожидание, как наиболее вероятное значение, как медианное значение и т.д. Однако, каким бы ни было это определение, вероятность точного выполнения прогноза в нормальном случае всегда равна нулю. Поэтому первостепенное значение приобретают такие характеристики качества прогноза, как доверительные интервалы и дисперсия.

Наблюдение дисперсии временных рядов, возникающих на финансовых рынках и других секторах экономики, позволяет выявить ряд общих статистических особенностей. Эти особенности, в основном, заключаются в следующем:

- 1) существует характерное изменение дисперсии ряда во времени;
- 2) имеются скопления больших по модулю значений временного ряда, разделенные колебаниями относительно малой интенсивности («кластеризация больших по модулю отклонений»);

3) существует большая (по сравнению с распределением Гаусса) вероятность больших по модулю значений ряда.

Данные свойства финансовых временных рядов были замечены уже в начале века [1]. Однако удовлетворительное их объяснение было предложено Энглом [2] только в начале 80-х годов. Он предположил, что изменение дисперсии определяется не внешними факторами, как это считали его предшественники, а внутренними параметрами и предысторией системы, в частности, реализованными в предыдущие моменты времени значениями временного ряда. Эта концепция получила название *авторегрессионной условной гетероскедастичности* (авторегрессионность — зависимость от предшествующих значений ряда, условность — дисперсия рассчитывается при условии, что предшествующие значения ряда известны, гетероскедастичность — изменение дисперсии во времени), или в сокращенной латинской аббревиатуре ARCH. Проверка концепции ARCH показала ее богатые возможности при объяснении статистических особенностей временных рядов, возникающих на валютных и иных финансовых рынках. Дальнейшее теоретическое развитие этой концепции привело к появлению целого класса удачных моделей. Кратко они будут описаны в разделе 2.1. Ссылки на многочисленные успешные применения различных форм ARCH-моделей можно найти в обзоре [3] (см. также [4, 5] и цитированную там литературу). Некоторые другие аспекты использования вероятностно-статистических подходов к моделированию финансовых временных рядов описаны в [6, 7].

Настоящая работа посвящена, в основном, применению идей концепции ARCH для анализа временных рядов российских финансовых рынков. Она является продолжением публикаций [8–11], посвященным проблеме описания финансовых временных рядов.

Предварительный взгляд на характер экономических рядов подтверждает наличие свойств, присущих явлению ARCH. Тем не менее, до настоящего времени в российской литературе, посвященной математическим методам экономики, в том числе и анализу временных рядов, этому явлению не уделялось достаточного внимания, которое ему уделяется в зарубежной литературе. Между тем нельзя сказать, что оно представляет исключительно теоретический интерес. ARCH-модели дают возможность не только улучшить точность прогнозирования, но также позволяют предсказать значение дисперсии этого прогноза, служащей естественной мерой риска при операциях на финансовых рынках. Один из парадоксальных выводов этой теории в приложении к валютному рынку заключается в том, что в определенных ситуациях операции на форвардном рынке оказываются менее рискованными, чем операции со *spot*-курсами (см. [3]).

Другим интересным применением ARCH-моделей могла бы быть проверка гипотезы об избегающих риска экономических агентах. Эта проверка осуществляется сравнением данных об объемах операций и одновременных оценок дисперсии. Если продавцы и покупатели на рынке избегают риска, то объемы операций должны снижаться вместе с увеличением дисперсии.

Данная работа имеет следующие основные цели.

1. Предложить теоретическое объяснение возникновения и распространенности ARCH-явлений на финансовых рынках.
2. Идентифицировать ARCH-модели, возникающие на некоторых финансовых рынках России и оценить параметры этих моделей.
3. Разработать необходимые методы идентификации и оценки параметров ARCH-моделей.

Необходимо отметить некоторые особенности временных рядов российских финансовых рынков, накладывающие свой отпечаток на всякое статистическое исследование на их основе. Во-первых, это относительно небольшая длительность имеющихся рядов по сравнению с временными рядами, с которыми имеют дело зарубежные статистические работы. Во-вторых, российские временные ряды сложились в услови-

ях переходной экономики. Вследствие этого на протяжении анализируемого периода могут меняться не только параметры, но и вид самих статистических законов. Как будет видно из статистической части работы, это явление было обнаружено на базе данных валютного рынка России.

Структурно работа состоит из двух основных частей. После настоящего введения во второй (теоретической) части содержатся базовые рассуждения, посвященные описанию различных видов ARCH-моделей, механизму возникновения явления ARCH на финансовых рынках, а также математические и статистические основы идентификации и оценки параметров ARCH-моделей. Третья часть посвящена применению базовых идей теоретической части к анализу динамики курса доллара на ММВБ с июня 1993 года по октябрь 1995 года. Попутно решаются некоторые вопросы обработки временных рядов, имеющие чисто прикладной характер. В последней части кратко описан ряд идей, дающих возможность дальнейшего развития данного направления.

§ 2. Математические основы ARCH-моделей

2.1. ARCH-модели. В данном разделе представлены основные виды ARCH-моделей, начиная с оригинальной и простейшей модели Энгла [2] до более сложных моделей его последователей. При этом изложение, в основном, базируется на обзоре [3]. В конце раздела представлена модель, которая возникла в процессе анализа ряда, описанного в статистической части. Хотя эта модель, как будет показано ниже, естественным образом возникает при моделировании финансовых рынков, она до сих пор не была сформулирована. Более того, предложенная модель в определенном смысле обладает авторегрессионной условной гетероскедастичностью.

Модель Энгла. Как было отмечено во введении, основная идея Энгла состояла в гипотезе о зависимости дисперсии случайной величины ξ от ее значений в предшествующие моменты времени. В простейшем случае формализация этой идеи может быть записана следующим образом:

$$v_t = a_0 + a_1 \xi_{t-1}^2 + \dots + a_g \xi_{t-g}^2, \quad (1)$$

где v_t — дисперсия и a_i ($i = 1, \dots, g$) — постоянные коэффициенты. Сокращенно эта модель обозначается ARCH(g). Чтобы обеспечить положительность дисперсии, необходимо ввести условия $a_i > 0$.

Обобщенная модель ARCH (GARCH). Обобщенная модель ARCH (Generalized ARCH-model, GARCH) была предложена Боллерслефом [12]. В процессе применения концепции ARCH к временным рядам, наблюдаемым на финансовых рынках, оказалось, что часто необходимо рассматривать ARCH-модели высокого порядка, т.е. с большим количеством параметров a_i . Иными словами, в правой части (1) необходимо удерживать большое число членов вида $a_i \xi_{t-i}^2$. В работе [12] было предложено использовать вместо этого один или несколько членов вида $b_i v_{t-i}$, где v_t — дисперсия в момент времени t , b_i — постоянные параметры. Такая модель запишется как

$$v_t = a_0 + a_1 \xi_{t-1}^2 + \dots + a_g \xi_{t-g}^2 + b_1 v_{t-1} + \dots + b_p v_{t-p}.$$

Сокращенно эта модель обозначается GARCH(g, p). Для того чтобы обеспечить положительность дисперсии, обычно вводятся условия $a_i > 0$, $b_i > 0$, хотя было показано [13, 14], что положительность дисперсии может быть обеспечена и при более слабых условиях. GARCH-модель оказалась весьма удачным обобщением первоначальной модели Энгла и используется очень часто.

Другие модели. В отличие от первоначальной модели Энгла ARCH(g) и модели Боллерслева GARCH(g, p), другие модели, предложенные после них, либо не имеют

широкого распространения и используются для описания конкретных временных рядов, либо намного менее удобны при расчетах. В данном разделе некоторые из этих моделей будут кратко представлены вместе со ссылками на работы, где имеется более подробное описание.

(1) Log ARCH-модель [15]: $\log v_t = a_0 + a_1 \log \xi_{t-1}^2 + \dots + a_q \log \xi_{t-q}^2$. Эта модель удобна тем, что для нее нет необходимости вводить ограничения на параметры для обеспечения положительности дисперсии.

(2) Нелинейная ARCH-модель (NARCH) [16]: $v_t = [a_0 + a_1(\xi_{t-1}^2)^2 + \dots + a_q(\xi_{t-q}^2)^d]^{1/d}$. Данная модель является промежуточной между ARCH- и Log ARCH-моделями.

(3) Threshold ARCH-модель (TARCH) [17]: $v_t = [a_0 + a_1^- \xi_{t-1}^- + \dots + a_q^- \xi_{t-q}^- + a_1^+ \xi_{t-1}^+ + \dots + a_q^+ \xi_{t-q}^+]^2$, где $\xi_{t-i}^- = \min\{\xi_{t-i}, 0\}$, $\xi_{t-i}^+ = \max\{\xi_{t-i}, 0\}$. Положительные и отрицательные значения ξ_{t-i} по-разному влияют на дисперсию.

(4) Асимметричные ARCH-модели [18]: $v_t = a_0 + a_1(\xi_{t-1} + c)^2 + b_1 v_{t-1}$, $v_t = a_0 + a_1(\xi_{t-1}/v_{t-1}^{1/2} + c)^2 + b_1 v_{t-1}$, $v_t = a_0 + a_1(\xi_{t-1} + c v_{t-1}^{1/2})^2 + b_1 v_{t-1}$, где c — постоянный параметр. Как и в случае TARCH-моделей, положительные и отрицательные значения ξ_{t-i} тоже по-разному влияют на дисперсию.

(5) Модель авторегрессионной условной плотности (ARCD-model) [19] является обобщением ARCH-моделей на случай негауссовского распределения: $\xi_t \sim f(\xi, H_t)$, $H_t = H(H_{t-1}, \xi_{t-1}, \dots, \xi_{t-q})$. Случайная величина ξ_t распределена в соответствии с функцией плотности вероятности f , зависящей от параметра H_t (возможно, векторного). Параметр H_t , в свою очередь, точно определяется через свое предыдущее значение и предшествующие значения величины ξ_t .

Финансовая ARCH-модель. В заключение этого параграфа рассмотрим модель, которая возникла в ходе настоящей работы в рамках предложенного объяснения возникновения явления ARCH на финансовых рынках. Она формулируется следующим образом:

$$\xi_t = a_{1t} \xi_{t-1} + \dots + a_{qt} \xi_{t-q} + b_{1t} s_{t-1} + \dots + b_{pt} s_{t-p} + c_{1t} x_{t-1} + \dots + c_{nt} x_{t-n} + x_t, \quad (2)$$

$$s_t^2 = v_{a1} \xi_{t-1}^2 + \dots + v_{a_q} \xi_{t-q}^2 + v_{b1} s_{t-1}^2 + \dots + v_{b_p} s_{t-p}^2 + v_{c1} x_{t-1}^2 + \dots + v_{c_n} x_{t-n}^2 + v_x, \quad (3)$$

где $a_{it} = a_i + \delta a_{it}$, $b_{it} = b_i + \delta b_{it}$, $c_{it} = c_i + \delta c_{it}$, a_i, b_i, c_i — математические ожидания коэффициентов, $\delta a_{it}, \delta b_{it}, \delta c_{it}, x_t$ — независимые случайные величины с нулевым средним («белый шум»), s_t — стандартное отклонение (корень из дисперсии) ξ_t в момент t , $v_{a_i}, v_{b_i}, v_{c_i}$ — дисперсии коэффициентов, и v_x — дисперсия x_t . Данная модель аналогична модели GARCH, но отличается добавкой членов вида $v_{c_i} x_{t-i}^2$. Заметим, что хотя такие члены до сих пор не вводились в модели с авторегрессионной условной гетероскедастичностью, они также привносят свойства ARCH в модель. Действительно, рассмотрим простейшую модель с членом такого вида:

$$\xi_t = c_{1t} x_{t-1} + x_t, \quad (4)$$

$$s_t^2 = v_{c1} x_{t-1}^2 + v_x. \quad (5)$$

Легко убедиться, что дисперсия s_t^2 коррелирует с квадратом предыдущего значения ξ_{t-1} : $\text{cov}(s_t^2, \xi_{t-1}^2) = v_{c1} (\mathbb{E} x^4 - v_x^2)$, где \mathbb{E} — знак математического ожидания и $\text{cov}(\cdot, \cdot)$ — ковариация. Таким образом, хотя связь между дисперсией и предыдущим значением случайной величины является не функциональной а корреляционной, она все же присутствует, что позволяет отнести модель (4)–(5) к классу ARCH-моделей.

2.2. Модель краткосрочных колебаний финансового рынка. Цель настоящего раздела — предложить модель механизма возникновения явления ARCH на финансовых рынках и объяснить распространенность этого явления.

2.2.1. Параметры рыночных спроса и предложения и доходность финансового инструмента. Мы будем исходить из предположения, что рассматриваемый финансовый рынок является организованным, т. е. на нем устанавливается

единая цена для всех участников рынка, уравнивающая спрос и предложение. Допустим, что спрос и предложение имеют следующий вид:

$$D = A_d - B_d p, \quad S = A_s + B_s p,$$

где D — функция рыночного спроса, S — функция рыночного предложения, A_d , B_d , A_s , B_s — коэффициенты, p — цена актива. Чистый спрос можно записать как $ND = A - Bp$, где $A = A_d - A_s$, $B = B_d + B_s$. Очевидно, чистый спрос в равновесии равен нулю. Следовательно, равновесная цена определится следующим образом:

$$p = \frac{A}{B}. \quad (6)$$

Поскольку уровень цены на протяжении длительного периода подвержен влиянию инфляционных процессов, более удобной характеристикой для анализа краткосрочных колебаний рынка является дневная доходность $r_t = (p_t - p_{t-1})/p_{t-1}$. Теперь, используя соотношение (6), получим доходность, выраженную через относительное дневное изменение параметров чистого спроса:

$$r_t \approx \delta A_t - \delta B_t, \quad (7)$$

где $\delta A_t = (A_t - A_{t-1})/A_{t-1}$, $\delta B_t = (B_t - B_{t-1})/B_{t-1}$ — относительное изменение параметров чистого спроса. Приближенное равенство (7) легко понять, поскольку $A_t - A_{t-1} \ll A_{t-1}$, $B_t - B_{t-1} \ll B_{t-1}$. Эти неравенства выполняются практически всегда, поскольку они являются необходимыми условиями нормального функционирования всякого финансового рынка.

2.2.2. Доходность как функция рыночных индикаторов и других факторов. В предыдущем разделе было найдена зависимость краткосрочной (дневной) доходности рынка от относительного дневного изменения параметров чистого спроса. Свяжем это изменение параметров с наблюдаемыми значениями рыночных индикаторов и некоторыми другими факторами.

Изменение параметров чистого спроса имеет две составляющие: (1) краткосрочная, т. е. обусловленная действием краткосрочных факторов; (2) долго- и среднесрочная, т. е. обусловленная действием более длительных факторов. Поэтому можно записать $\delta A = \delta A^s + \delta A^l$, $\delta B = \delta B^s + \delta B^l$. Заметим, что вторая составляющая проявляется в краткосрочных колебаниях рынка как медленно изменяющаяся средняя доходность рынка.

Обратимся к более подробному анализу краткосрочной составляющей изменения параметров чистого спроса. Какими факторами она может быть обусловлена? В первую очередь следует заметить, что эти факторы сами должны носить *краткосрочный* характер. Следовательно, можно предложить разделение таких факторов на 3 группы:

- 1) наблюдаемые всеми участниками рынка фактически сложившиеся краткосрочные рыночные индикаторы — зафиксированные предыдущие уровни дневной доходности рынка;
- 2) уровень риска при краткосрочных вложениях;
- 3) прочие факторы.

Хотя так называемые прочие факторы поставлены на третье место, их существование является необходимым условием возможности краткосрочных спекуляций на организованных рынках. К этим прочим факторам относятся:

(а) флуктуационное изменение объема спроса и предложения со стороны неспекулятивных участников рынка (такое изменение в случае, например, валютного рынка может быть связано с тем, что каждый отдельный экспортер или импортер ведет операции не каждый день, а время от времени); общий уровень неспекулятивного

чистого спроса формируется путем сложения большого количества таких участников, поэтому он сохраняется примерно постоянным, но флуктуирующим около этого постоянного уровня;

(б) изменение конъюнктуры других финансовых рынков;

(в) резкое изменение политической конъюнктуры, внешняя информация и т. п.

Предположим, что краткосрочная составляющая изменения параметров чистого спроса является линейной функцией от перечисленных факторов, т. е.

$$\delta A^s = a_1^A r_{t-1} + \dots + a_q^A r_{t-q} + b^A u_t + c_0^A e_t + c_1^A e_{t-1} + \dots + c_n^A \xi_{t-n}, \quad (8)$$

$$\delta B^s = a_1^B r_{t-1} + \dots + a_q^B r_{t-q} + b^B u_t + c_0^B e_t + c_1^B e_{t-1} + \dots + c_n^B \xi_{t-n}, \quad (9)$$

где u_t — параметр, характеризующий влияние рискованности краткосрочных операций, ξ_t — агрегированный параметр, описывающий прочие факторы, a^A , a^B , b^A , b^B , c^A и c^B — коэффициенты. Зависимость r_t от прошлых значений прочих факторов описывает различия в скорости реагирования на них со стороны различных участников рынка. Теперь, используя (7), (8) и (9), получаем:

$$r_t = \delta A_t^l - \delta B_t^l + a_1 r_{t-1} + \dots + a_q r_{t-q} + b u_t + c_0 e_t + c_1 e_{t-1} + \dots + c_n \xi_{t-n}, \quad (10)$$

где $a_i = a_i^A - a_i^B$, $b = b^A - b^B$, $c_i = c_i^A - c_i^B$. Таким образом, соотношение (10) выражает доходность как функцию рыночных индикаторов и других факторов.

Можно допустить, что $E \xi_t = 0$, поскольку в противном случае величина ξ_t должна быть разбита на долгосрочную составляющую $\xi_t^l = E \xi_t$ и краткосрочную составляющую $\xi_t^s = \xi_t - \xi_t^l$.

2.2.3. Уравнение краткосрочной доходности. Для того чтобы получить замкнутое уравнение, описывающее краткосрочные колебания финансового рынка, необходимо из (10) исключить долго- и среднесрочную составляющие. Для этого, во-первых, заметим, что фактически краткосрочная составляющая изменения параметров чистого спроса зависит не от дневной доходности рынка, а от отклонения этой доходности от более длительной долго- и среднесрочной тенденции. Поэтому вычтем из правой и левой частей (10) член δA_t . Кроме того, можно перенормировать ξ_t и c_i так, чтобы $c_0 = 1$. Таким образом, получим:

$$r_t = a_1 r_{t-1} + \dots + a_q r_{t-q} + b u_t + \xi_t + c_1 e_{t-1} + \dots + c_n \xi_{t-n}, \quad (11)$$

где r_t теперь обозначает отклонение дневной доходности рынка от долго- и среднесрочной тенденции.

Предположим, что при оценке рискованности краткосрочных операций участники рынка ориентируются на ненаблюдаемые явно, но оцениваемые ими (интуитивно или на основе каких-либо моделей) значения дисперсии доходности рынка в предыдущие дни, т. е.

$$b u_t = b_1 s_{t-1} + \dots + b_p s_{t-p}, \quad (12)$$

где s_{t-k} — стандартное отклонение (корень из дисперсии) краткосрочной доходности рынка в момент $t-k$. Тогда из (11), (12) получим замкнутое уравнение краткосрочной доходности:

$$r_t = a_1 r_{t-1} + \dots + a_q r_{t-q} + b_1 s_{t-1} + \dots + b_p s_{t-p} + \xi_t + c_1 e_{t-1} + \dots + c_n \xi_{t-n}. \quad (13)$$

Полученное соотношение позволяет оценить (с точностью до ξ_t) будущее значение краткосрочной доходности, исходя из известных (т. е. определившихся в прошлом) параметров.

2.2.4. Флюктуация параметров уравнения краткосрочной доходности и явление ARCH. Как было сказано во введении, краткосрочные колебания финансовых рынков зачастую проявляют свойства авторегрессионной условной гетероскедастичности (ARCH). Это явление можно объяснить, исходя из полученного в

предыдущем параграфе уравнения краткосрочной доходности (13), если предположить, что коэффициенты a , b и c сами не являются постоянными, а флуктуируют около некоторых постоянных значений:

$$a_{i_t} = a_t + \delta a_{i_t}, \quad (14)$$

$$b_{i_t} = b_t + \delta b_{i_t}, \quad (15)$$

$$c_{i_t} = c_t + \delta c_{i_t}, \quad (16)$$

где a_i , b_i , c_i — математические ожидания коэффициентов, δa_{i_t} , δb_{i_t} , δc_{i_t} — стационарные случайные процессы с нулевым средним (см. п. 2.3.1), не зависящие друг от друга и от прочих факторов (т. е. величины ξ). Действительно, рассчитаем дисперсию r при условии, что все предыдущие значения r , s и ξ известны.

$$s_t^2 = v_{a_1} r_{t-1}^2 + \dots + v_{a_q} r_{t-q}^2 + v_{b_1} s_{t-1}^2 + \dots + v_{b_p} s_{t-p}^2 + v_{c_1} \xi_{t-1}^2 + \dots + v_{c_n} \xi_{t-n}^2 + v_\xi, \quad (17)$$

где v_{a_i} , v_{b_i} , v_{c_i} — дисперсии коэффициентов, v_ξ — дисперсия ξ_t . Легко убедиться, что полученное соотношение (17), определяющая вид дисперсии краткосрочной доходности рынка, имеет ту же структуру, что и выражение (3).

Таким образом, в данном разделе показано, каким путем явление ARCH может возникать на финансовых рынках. Заметим, что проведенные рассуждения не относились к какому-либо конкретному рынку. Они остаются справедливыми для любого финансового рынка до тех пор, пока будут верны общие предположения, сделанные в ходе рассуждений. Эта общность рассуждений, их независимость от конкретного финансового рынка позволяет объяснить распространенность явления ARCH.

2.3. Теория Бокса–Дженкинса и модели с флуктуирующими коэффициентами. Теория Бокса–Дженкинса [20] представляет собой достаточно распространенный метод анализа стационарных временных рядов¹⁾. Под стационарностью временного ряда здесь понимается независимость стохастических параметров ряда (математического ожидания, дисперсии, коэффициентов автокорреляции и т. п.) от времени в явном виде. При этом данные параметры могут зависеть от предыстории, т. е. реализованных в предыдущие моменты времени значений временного ряда и, следовательно, могут меняться.

2.3.1. Некоторые идеи теории Бокса–Дженкинса. Основная идея теории Бокса–Дженкинса состоит в нахождении соотношения определенного класса между значениями временного ряда, реализованными в разные моменты времени, которое бы достаточно адекватно описывало данный временной ряд. Класс соотношений, с которыми имеет дело теория Бокса–Дженкинса, описывается следующей общей моделью: $y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_q y_{t-q} + c_1 e_{t-1} + \dots + c_n e_{t-n} + \xi_t$, где ξ_t — «белый шум» с нулевым средним и дисперсией v_ξ , q , n — целочисленные параметры, называемые размерностью модели, и a_i , c_i — векторы коэффициентов. Общее название таких моделей — модели авторегрессии скользящего среднего размерности (q, n) или для краткости ARСС (q, n) . Главной характерной чертой моделей указанного класса является их линейность. Это, с одной стороны, обуславливает простоту методов теории Бокса–Дженкинса. С другой стороны, линейность модели оправдана как приближение первого уровня.

Методика анализа временных рядов состоит в следующих последовательных шагах: находятся параметры q и n , определяющие размерность модели (см. выше). оцениваются параметры a_i и b_i .

¹⁾Ограничимся рассмотрением стационарных рядов, так как опыт показывает, что краткосрочная доходность не может быть нестационарной.

Параметры размерности модели зачастую можно найти при помощи анализа автоковариационной или автокорреляционной функций временного ряда. Автоковариационная функция представляет собой математическое ожидание произведения отклонений значений временного ряда, разделенных интервалом времени k , от среднего: $g(k) = E(y_t - y)(y_{t-k} - y)$, где y — безусловное среднее значение y_t . По определению, автокорреляционная функция $f(k)$ равна: $f(k) = g(k)/v_y$, где v_y — безусловная дисперсия y_t .

Найдем вид автокорреляционной функции в случае модели APCC(0, n) или CC(n): $y_t = c_1 e_{t-1} + \dots + c_n e_{t-n} + \xi_t$, $y = 0$, $v_y = (1 + c_1^2 + \dots + c_n^2)v_\xi$,

$$g(k) = E(\xi_t + c_1 e_{t-1} + \dots + c_n e_{t-n})(\xi_{t-k} + c_1 e_{t-k-1} + \dots + c_n e_{t-k-n}),$$

где $c_0 = 1$. Следовательно,

$$g(k) = E \sum_{i,j} c_i e_{t-i} c_j e_{t-k-j} = \sum_{i,j} c_i c_j E \xi_{t-i} \xi_{t-k-j} = \sum_{i,j} c_i c_j \delta_{i,k+j} v_\xi = \sum_j c_{k+j} c_j v_\xi,$$

где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Тогда $f(k) = \sum_j c_{k+j} c_j / (1 + c_1^2 + \dots + c_n^2)$. Заметим, что $c_{k+j} = 0$ при $k+j > n$. Тогда если $k > n$, то для любого j выполняется $c_{k+j} = 0$ и, значит, $\sum_j c_{k+j} c_j = 0$. Таким образом, характерной чертой моделей CC(n) является обращение в 0 автоковариационной и автокорреляционной функций, начиная с момента $n+1$.

Рассмотрим теперь модели APCC(q , 0) или AP(q): $y_t = a_1 y_{t-1} + \dots + a_q y_{t-q} + \xi_t$. Определить автоковариационную и автокорреляционную функции для данной модели можно аналогично. Для краткости приведем их общий функциональный вид (более подробный анализ можно найти в монографии [20]):

$$g(k) = \sum_{i=1}^q g_i \exp\{w_i k\}, \quad (18)$$

$$f(k) = \sum_{i=1}^q f_i \exp\{w_i k\}, \quad (19)$$

где f_i, g_i, w_i — комплексные числа. При этом, однако, для любого k значение $g(k)$ является действительным числом. Соотношения (18), (19) показывают, что автоковариационная и автокорреляционная функции представляют собой суммы экспонент и затухающих колебаний. Заметим, что, в отличие от модели CC(n), эти функции, вообще говоря, не становятся равными 0 ни при каком конечном значении k .

2.3.2. Модели с флюктуирующими коэффициентами и теория Бокса–Дженкинса. Распространим теперь описанные в предыдущем параграфе идеи теории Бокса–Дженкинса на модели с флюктуирующими коэффициентами, общий вид которых представлен соотношениями (13)–(17). В дальнейшем эту модель будем обозначать как Модель(q, p, n). Как было показано в разделе 2.1 такая модель обладает свойством авторегрессионной условной гетероскедастичности. Заметим, что Модель($q, 0, n$) является естественным обобщением класса моделей APCC(q, n). Поэтому также естественно для их анализа и более общего класса моделей Модель(q, p, n) обратиться к идеям теории Бокса–Дженкинса.

Прежде всего найдем автоковариационные функции временных рядов, порождаемых моделью (13)–(17). Как и ранее, сначала рассмотрим Модель(0, 0, n) или «обобщенную» модель CC(n) (т.е. OCC(n)) $r_t = c_1 e_{t-1} + \dots + c_n e_{t-n} + \xi_t$ и вычислим автоковариационную функцию временного ряда, порождаемого этой моделью. Для этого необходимо определить математическое ожидание величины r_t :

$$r = E[c_{1t} \xi_{t-1} + \dots + c_{nt} \xi_{t-n} + \xi_t] = E c_{1t} E \xi_{t-1} + \dots + E c_{nt} E \xi_{t-n} + E \xi_t$$

или $r = (1 + c_1 + \dots + c_n)\xi$, где r — безусловное математическое ожидание r_t , ξ — безусловное математическое ожидание ξ_t . Поскольку из общих соображений (см. п. 2.2.2) $\xi = 0$, имеем $r = 0$. Теперь найдем дисперсию:

$$\begin{aligned} v_r = \mathbf{E} r_t^2 &= \mathbf{E} \sum_{i,j} c_{i,t} \xi_{t-i} c_{j,t} \xi_{t-j} = \sum_{i,j} \mathbf{E} c_{i,t} c_{j,t} \mathbf{E} \xi_{t-i} \xi_{t-j} \\ &= \sum_{i,j} (c_i c_j + v_{c_i} \delta_{i,j}) v_\xi = (1 + c_1^2 + \dots + c_n^2 + v_{c_1} + \dots + v_{c_n}) v_\xi, \end{aligned}$$

где $c_0 = 1$ и $v_{c_0} = 0$. Следовательно,

$$g(k) = \mathbf{E} (c_0 \xi_t + c_1 \xi_{t-1} + \dots + c_n \xi_{t-n}) (c_0 \xi_{t-k} + c_1 \xi_{t-k-1} + \dots + c_n \xi_{t-k-n}), \quad (20)$$

или

$$g(k) = \mathbf{E} \sum_{i,j} c_{i,t} \xi_{t-i} c_{j,t-k} \xi_{t-k-j} = \sum_{i,j} \mathbf{E} c_{i,t} c_{j,t-k} \mathbf{E} \xi_{t-i} \xi_{t-k-j}. \quad (21)$$

Очевидно, $g(k) = v_r$, когда $k = 0$. При $k \neq 0$ из (20) и (21) соответственно получим: $g(k) = \sum_{i,j} c_i c_j \delta_{i,k+j} v_\xi$, $g(k) = \sum_j c_{k+j} c_j v_\xi$. Заметим, что, в отличие от случая, рассмотренного в предыдущем параграфе, автоковариационная функция не дает возможности однозначного определения размерности модели. Действительно, если $c_n = 0$, то $g(n) = 0$. В то же время, дисперсия коэффициента c_n может быть ненулевой. Этот коэффициент, в свою очередь, будет оказывать влияние на поведение временного ряда.

Для определения параметра n необходимо обратиться к анализу автоковариационной или автокорреляционной функций отклонения квадрата значений временного ряда от безусловного математического ожидания. В дальнейшем для удобства такие функции будем называть автоковариационной и автокорреляционной функциями второго порядка, в то время как те функции, которые рассмотрены ранее, назовем функциями первого порядка. Обозначим функции второго порядка как $g_2(k)$ и $f_2(k)$. Автоковариационная функция второго порядка может быть вычислена следующим образом: $g_2(k) = \mathbf{E} (r_t^2 - \mathbf{E} r_t^2) (r_{t-k}^2 - \mathbf{E} r_{t-k}^2) = \mathbf{E} r_t^2 r_{t-k}^2 - \mathbf{E} [r_{t-k}^2]^2$.

Сначала найдем $\mathbf{E} r_t^2 r_{t-k}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} r_t^2 r_{t-k}^2 &= \mathbf{E} (c_0 \xi_t + c_1 \xi_{t-1} + \dots + c_n \xi_{t-n})^2 \\ &\quad \times (c_0 \xi_{t-k} + c_1 \xi_{t-k-1} + \dots + c_n \xi_{t-k-n})^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} r_t^2 r_{t-k}^2 &= \mathbf{E} \sum_{i,j,l,m} c_{i,t} c_{l,t} c_{j,t-k} c_{m,t-k} \xi_{t-i} \xi_{t-l} \xi_{t-k-j} \xi_{t-k-m} \\ &= \sum_{i,j,l,m} \mathbf{E} c_{i,t} c_{l,t} c_{j,t-k} c_{m,t-k} \mathbf{E} \xi_{t-i} \xi_{t-l} \xi_{t-k-j} \xi_{t-k-m}. \end{aligned}$$

Предположим, что $k \neq 0$. Тогда, опуская расчет $\mathbf{E} \xi_{t-i} \xi_{t-l} \xi_{t-k-j} \xi_{t-k-m}$, являющийся стандартной операцией тензорного анализа, определим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E} r_t^2 r_{t-k}^2 &= \sum_{i,j,l,m} \langle \mathbf{E} c_{i,t} c_{l,t} \mathbf{E} c_{j,t-k} c_{m,t-k} \{ (\mathbf{E} \xi_t^4 \mathbf{E} [\xi_t^2]^2) \delta_{i,l} \delta_{j,m} \delta_{i,k+j} \\ &\quad + \mathbf{E} [\xi_t^2]^2 (\delta_{i,l} \delta_{j,m} + \delta_{l,k+m} \delta_{i,k+j} + \delta_{i,k+m} \delta_{l,k+j}) \} \rangle \\ &= \sum_j (c_{k+j}^2 + v_{c_{k+j}}) (c_j^2 + v_{c_j}) (\mathbf{E} \xi_t^4 - 3 \mathbf{E} [\xi_t^2]^2) + \sum_{i,j} (c_i^2 + v_{c_i}) (c_j^2 + v_{c_j}) \mathbf{E} [\xi_t^2]^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i,j} (c_{k+i} c_{k+j} + v_{c_{k+i}} \delta_{i,j}) (c_i c_j + v_{c_i} \delta_{i,j}) \mathbf{E} [\xi_t^2]^2. \end{aligned}$$

Заметим, что второе слагаемое в последнем соотношении равно $\mathbf{E}[r_t^2]$ и $\mathbf{E}\xi_t^2 = v_\xi$. Отсюда следует:

$$g_2(k) = \sum_j (c_{k+j}^2 + v_{c_{k+j}})(c_j^2 + v_{c_j})(\mathbf{E}\xi_t^4 - 3v_\xi^2) + 2 \sum_{i,j} (c_{k+i}c_{k+j} + v_{c_{k+i}}\delta_{i,j})(c_i c_j + v_{c_i}\delta_{i,j})v_\xi^2. \quad (22)$$

Значит, $g_2(k) = 0$ при $k > n$, поскольку $c_{k+j} = 0$ и $v_{c_{k+j}} = 0$ для любых $j > 0$. В то же время, если $k = n$, то

$$g_2(k) = (\mathbf{E}\xi_t^4 - 3v_\xi^2)(c_n^2 + v_{c_n}) + 2v_\xi^2(c_n^2 + v_{c_n}) = (\mathbf{E}\xi_t^4 - v_\xi^2)(c_n^2 + v_{c_n}).$$

Таким образом, $g_2(n) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{E}\xi_t^4 = v_\xi^2$, т.е. для распределений специального вида. Отсюда следует, что в случае общего положения вычисление $g_2(k)$ или $f_2(k)$ дает возможность определить параметр n .

В том случае, если ξ_t имеет распределение Гаусса, соотношение (22) упрощается. Действительно, тогда $\mathbf{E}\xi_t^4 = 3v_\xi^2$. Следовательно,

$$g_2(k) = 2v_\xi^2 \sum_{i,j} (c_{k+i}c_{k+j} + v_{c_{k+i}}\delta_{i,j})(c_i c_j + v_{c_i}\delta_{i,j}).$$

Рассмотрим теперь Модель $(q, p, 0)$:

$$r_t = a_{1t}r_{t-1} + \dots + a_{qt}r_{t-q} + b_{1t}s_{t-1} + \dots + b_{pt}s_{t-p} + \xi_t, \quad (23)$$

$$s_t^2 = v_{a_1}r_{t-1}^2 + \dots + v_{a_q}r_{t-q}^2 + v_{b_1}s_{t-1}^2 + \dots + v_{b_p}s_{t-p}^2 + v_\xi. \quad (24)$$

Как непосредственно видно из (24), эта модель соответствует модели GARCH (q, p) (см. п. 2.1).

В первую очередь покажем, что если все b_i равны 0 (т.е. средние значения случайных коэффициентов b_{it} нулевые) и $\mathbf{E}\xi_t = 0$, то автоковариационная и автокорреляционная функции первого порядка временного ряда r_t , порождаемого данной моделью, имеют тот же вид, что и для модели AP (q) (см. (18), (19)). Для этого заметим, что для любого t уравнения (23), (24) инвариантны относительно замены $\xi_t \rightarrow -\xi_t$, $b_{it} \rightarrow -b_{it}$, $r_t \rightarrow -r_t$, $s_t \rightarrow s_t$. Поскольку ξ_t и b_{it} имеют симметричное распределение с нулевым средним, такая замена оставляет все вероятности неизменными. Таким образом, для любого значения s_t вероятности положительного и равного по модулю отрицательного значения r_t будут равны. Легко показать, что при принятых предположениях $\mathbf{E}r_t = 0$. Отсюда $\text{cov}(r_t, s_{t-k}) = \mathbf{E}r_t(s_{t-k} - \mathbf{E}s_{t-k})$. Очевидно, ковариация обращается в нуль в силу «равноправности» положительных и отрицательных значений r_t .

Применим к уравнению (23) оператор $\text{cov}(\cdot, r_{t-k})$. Тогда

$$\text{cov}(r_t, r_{t-k}) = \text{cov}(a_{1t}r_{t-1}, r_{t-k}) + \dots + \text{cov}(a_{qt}r_{t-q}, r_{t-k}) + \text{cov}(b_{1t}s_{t-1}, r_{t-k}) + \dots + \text{cov}(b_{pt}s_{t-p}, r_{t-k}) + \text{cov}(\xi_t, r_{t-k}).$$

Далее, нетрудно заметить, что если x и y , а также y и z независимы, то $\text{cov}(xy, z) = \mathbf{E}x\text{cov}(y, z)$. Поэтому вследствие независимости a_{it} от r_{t-k} , b_{jt} от s_{t-k} и от r_{t-k} , и ξ_t от r_{t-k} для любого $k > 0$ найдем, что

$$\text{cov}(r_t, r_{t-k}) = a_1 \text{cov}(r_{t-1}, r_{t-k}) + \dots + a_q \text{cov}(r_{t-q}, r_{t-k}) + b_1 \text{cov}(s_{t-1}, r_{t-k}) + \dots + b_p \text{cov}(s_{t-p}, r_{t-k}) = a_1 \text{cov}(r_{t-1}, r_{t-k}) + \dots + a_q \text{cov}(r_{t-q}, r_{t-k}).$$

Таким образом,

$$g(k) = a_1 g(k-1) + \dots + a_q g(k-q). \quad (25)$$

Для модели $AP(q)$ автоковариационная функция подчиняется точно такому же уравнению. Следовательно, можно утверждать, что и для Модели $(g, p, 0)$ при принятых предположениях она имеет вид (18).

Здесь необходимо сделать два важных замечания.

1) Предположение, что значения случайных коэффициентов b_{it} близки к нулю, не противоречит общепринятому тезису теории финансов, что активы с большим риском должны иметь большую доходность. Дело в том, что в данном тезисе речь идет о так называемой «ожидаемой», а не о дневной доходности, связанной с изменением цены. Действительно, предположим, что величина риска определенного актива, по мнению участников рынка, возросла. Тогда некоторые из них будут стремиться удалить данный актив из своего портфеля, что, при прочих равных условиях, приведет к падению цены, т. е. к отрицательной дневной доходности. В то же время, ожидаемая доходность, определяемая как отношение доходов к текущей цене, увеличится.

2) Если коэффициенты $b_{it} \neq 0$ малы, то уравнение (25) нарушится на величину второго порядка малости по b_i . Это нарушение будет связано с появлением в его правой части членов вида $b_i \text{cov}(s_{t-i}, r_{t-k})$. Однако можно ожидать, что $\text{cov}(s_{t-i}, r_{t-k})$ имеет первый порядок малости по b_i , поскольку при $b_i = 0$ выполняется $\text{cov}(s_{t-i}, r_{t-k}) = 0$ для любого i . Таким образом, отклонение автоковариационной функции от общего вида (18) будет второго порядка малости по b_i .

Найдем теперь автоковариационную функцию второго порядка. Точные расчеты удастся провести только в случае Модели $(1, 1, 0)$, для которой

$$r_t = a_1 r_{t-1} + b_1 s_{t-1} + \xi_t, \quad (26)$$

$$s_t^2 = v_{a_1} r_{t-1}^2 + v_{b_1} s_{t-1}^2 + v_\xi. \quad (27)$$

Путем несложных преобразований из уравнения (26) получим:

$$g_2(k) = (a_1^2 + v_{a_1})g_2(k-1) + v_{b_1}h(k-1),$$

а из уравнения (27) получим

$$h(k) = v_{a_1}g_2(k-1) + v_{b_1}h(k-1).$$

Данную систему нетрудно решить:

$$g_2(k) = (a_1^2 + v_{a_1} + v_{b_1})g_2(k-1) - a_1^2 v_{b_1}g_2(k-2). \quad (28)$$

Полученное соотношение является частным случаем (25). Поэтому (см. (18)) имеем $g_2(k) = g_{21}\xi^{w_1 k} + g_{22}\xi^{w_2 k}$. Следовательно, $g_{21}\xi^{w_1 k}[1 - (a_1^2 + v_{a_1} + v_{b_1})\xi^{-w_1} + a_1^2 v_{b_1}\xi^{-2w_1}] + g_{22}\xi^{w_2 k}[1 - (a_1^2 + v_{a_1} + v_{b_1})\xi^{-w_2} + a_1^2 v_{b_1}\xi^{-2w_2}] = 0$. Так как это равенство сохраняется для любого k , то $1 - (a_1^2 + v_{a_1} + v_{b_1})\xi^{-w_1,2} + a_1^2 v_{b_1}\xi^{-2w_1,2} = 0$. Таким образом,

$$\xi^{-w_1,2} = \frac{a_1^2 + v_{a_1} + v_{b_1} \pm \sqrt{(a_1^2 - v_{b_1})^2 + v_{a_1}^2 + 2v_{a_1}(v_{b_1} + a_1^2)}}{2a_1^2 v_{b_1}}.$$

Здесь оба значения корня положительны и $w_{1,2}$ — действительные числа.

2.4. Метод максимального правдоподобия для моделей с флуктуирующими коэффициентами. Метод максимального правдоподобия является достаточно удобным методом оценки параметров распределения случайной величины. Его применение для анализа временных рядов разбивается на несколько последовательных шагов:

— выдвижение гипотезы относительно вида модели, порождающей временной ряд;

— построение многомерной функции распределения; количество аргументов функции должно быть равно количеству членов временного ряда;

— конструирование функции правдоподобия (функции от параметров распределения) путем подстановки в многомерную функцию распределения реализованных значений временного ряда.

— максимизация функции правдоподобия, т. е. нахождение значений параметров, при которых функция правдоподобия имеет максимальное значение.

2.4.1. Вычисление функции правдоподобия для Моделей (q, p, n) . В этом параграфе проводится вычисление функции правдоподобия для моделей с флуктуирующими коэффициентами. Рассмотрим общий вид модели, полученной в п. 2.2 (см. (13)–(17)):

$$r_t = a_1 r_{t-1} + \dots + a_q r_{t-q} + b_1 s_{t-1} + \dots + b_p s_{t-p} + c_1 \xi_{t-1} + \dots + c_n \xi_{t-n} + \xi_t,$$

$$s_t^2 = v_{a_1} r_{t-1}^2 + \dots + v_{a_q} r_{t-q}^2 + v_{b_1} s_{t-1}^2 + \dots + v_{b_p} s_{t-p}^2 + v_{c_1} \xi_{t-1}^2 + \dots + v_{c_n} \xi_{t-n}^2 + v_\xi.$$

Для вычисления функции многомерного распределения воспользуемся известной теоремой Байеса (см., например, [21]).

Сначала найдем плотность вероятности реализации ряда r_t при условии реализации «белого шума» ξ_t , т. е. условную функцию распределения. Для этого заметим, что при фиксированных ξ_t величина r_t представляет собой линейную комбинацию гауссовских случайных величин. Апостериорная вероятность некоторой реализации r_t не зависит от вероятности реализации r_{t-k} для любого k , так как в момент определения первой реализации значения r_{t-k} уже являются фиксированными. Поэтому многомерная условная функция распределения разбивается на произведение одномерных условных функций распределения. При принятых предположениях многомерная условная функция распределения имеет следующий вид:

$$F(r_t | \xi_t) = \prod_t \frac{\exp \{-(r_t - r_{1t})^2 / (2w_t)\}}{\sqrt{2\pi w_t}},$$

где $r_{1t} = a_1 r_{t-1} + \dots + a_q r_{t-q} + b_1 s_{t-1} + \dots + b_p s_{t-p} + c_1 \xi_{t-1} + \dots + c_n \xi_{t-n} + \xi_t$ и $w_t = v_{a_1} r_{t-1}^2 + \dots + v_{a_q} r_{t-q}^2 + v_{b_1} s_{t-1}^2 + \dots + v_{b_p} s_{t-p}^2 + v_{c_1} \xi_{t-1}^2 + \dots + v_{c_n} \xi_{t-n}^2$. Чтобы получить безусловную функцию распределения, нужно найти математическое ожидание от условной функции распределения с учетом функции распределения ξ_t :

$$F(r_t) = \int de_{1-n} \dots de_T F(r_t | \xi_t) \prod_t \frac{\exp \{-(\xi_t - \xi)^2 / (2v_\xi)\}}{\sqrt{2\pi v_\xi}}, \quad (29)$$

где T — длина вектора r_t .

В случае общей Модели (q, p, n) преобразовать выражение (29) к более простому виду не удастся. Однако для Модели $(q, p, 0)$ вычисление $F(r_t)$ может быть доведено до конца. Действительно, в этом случае $r_{1t} = a_1 r_{t-1} + \dots + a_q r_{t-q} + b_1 s_{t-1} + \dots + b_p s_{t-p} + \xi_t$, $w_t = v_{a_1} r_{t-1}^2 + \dots + v_{a_q} r_{t-q}^2 + v_{b_1} s_{t-1}^2 + \dots + v_{b_p} s_{t-p}^2$. Легко усмотреть, что r_{1t} зависит только от ξ_t а w_t не зависит от переменных интегрирования. Поэтому интеграл по многомерному пространству превращается в произведение интегралов

по одномерному пространству:

$$\begin{aligned} F(r_t) &= \prod_t \int de_t \frac{\exp\{(r_t - r_{1t})^2 / (2w_t)\}}{\sqrt{2\pi w_t}} \frac{\exp\{(\xi_t - \xi)^2 / (2v_\xi)\}}{\sqrt{2\pi v_\xi}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^t} \prod_t \int de_t \frac{\exp\{- (r_t - r_{1t})^2 / (2w_t) - (\xi_t - \xi)^2 / (2v_\xi)\}}{\sqrt{v_\xi w_t}} \\ &= \prod_t \frac{\exp\{- (r_t - r_{2t})^2 / [2(w_t + v_\xi)]\}}{\sqrt{2\pi(w_t + v_\xi)}}, \end{aligned}$$

где $r_{2t} = a_1 r_{t-1} + \dots + a_q r_{t-q} + b_1 s_{t-1} + \dots + b_p s_{t-p} + \xi$ — математическое ожидание r_t в момент t при условии, что известны все предыдущие значения r и s , $w_t + v_\xi = v_{a_1} r_{t-1}^2 + \dots + v_{a_q} r_{t-q}^2 + v_{b_1} s_{t-1}^2 + \dots + v_{b_p} s_{t-p}^2 + v_\xi$ — дисперсия r_t в момент t при тех же условиях. Теперь легко вычислить функцию правдоподобия:

$$\begin{aligned} L(a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_p, \xi, v_{a_1}, \dots, v_{a_q}, v_{b_1}, \dots, v_{b_p}, v_\xi) \\ = \ln F(r_t) = \sum_t \left[- \frac{(r_t - r_{2t})^2}{2u_t} - \frac{1}{2} \ln(2\pi u_t) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

где $u_t = w_t + v_\xi$.

§ 3. Концепция ARCH и финансовый рынок России

В качестве статистического материала в данной работе рассмотрены колебания валютного рынка России. Выбор валютного рынка не случаен. Во-первых, это наиболее старый финансовый рынок России, и за время его существования уже накоплен достаточно большой материал, необходимый для анализа. Во-вторых, наибольшее количество статистических результатов в области авторегрессионной условной гетероскедастичности были получены именно для колебаний доходности валютных рынков. В качестве первоначального временного ряда были взяты данные по изменению курса доллара США на ММВБ за период с июня 1993 года по октябрь 1995 года. Как известно, этот период экономического развития России характеризуется явлением, которое получило название «черный вторник» (11 октября 1994г.). Соответствующие временные ряды представлены на рис. 1 и рис. 2.

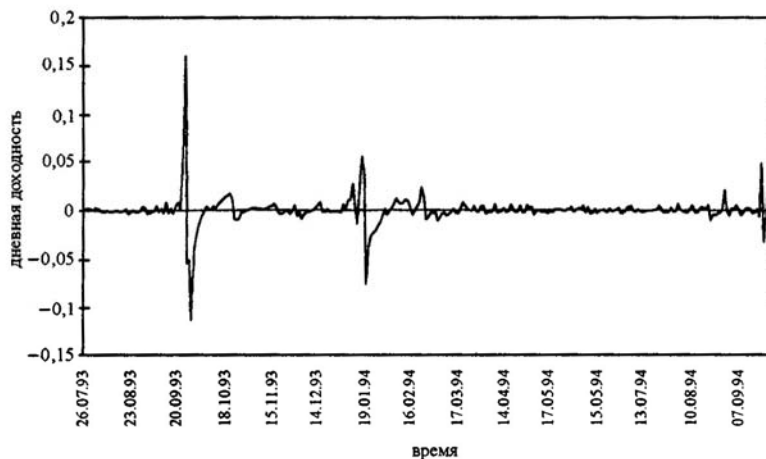


Рис. 1. Динамика краткосрочных изменений курса доллара к рублю до «черного вторника» 11 октября 1994 г.

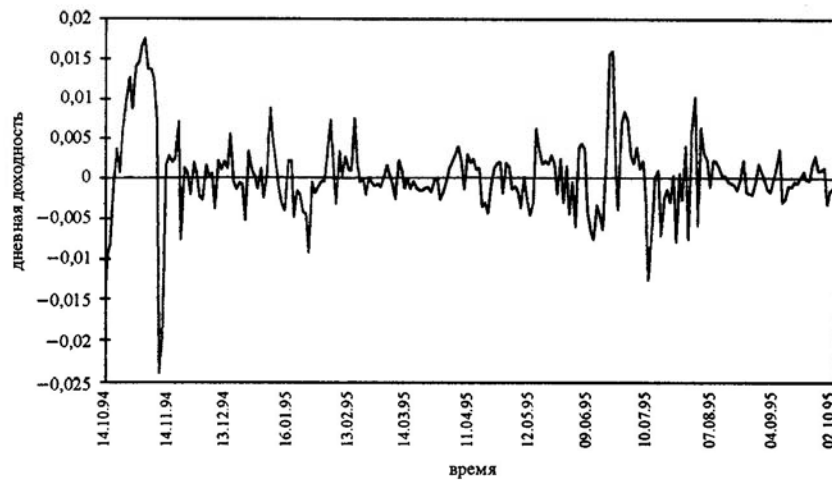


Рис. 2. Динамика краткосрочных изменений курса доллара к рублю после «черного вторника» 11 октября 1994 г.

3.1. Определение вида модели. Прежде, чем применять методы статистической теории, как правило, требуется первоначальный временной ряд подвергнуть предварительной обработке. Необходимость такой процедуры заключается в нерегулярности статистических данных вследствие выходных и праздничных дней. Наиболее естественным выходом из данной ситуации является исключение этих дней из рассмотрения. Действительно, в эти дни большая часть людей не работает, производство стоит. Фактически все экономические процессы приостанавливаются. Следовательно, можно допустить, что применительно к экономике и, в частности, финансовым рынкам, этих дней вообще не существует. Таким образом, на первом шаге предварительной обработки временного ряда должны быть исключены выходные и праздничные дни.

На следующем шаге по обычной формуле необходимо рассчитать дневную доходность рынка, или, иными словами, относительное изменение курса валюты по сравнению с предыдущими торгами: $r_t = (p_t - p_{t-1})/p_{t-1}$.

На третьем шаге в соответствии с рассуждениями п. 2.2.3 необходимо исключить долго- и среднесрочную тенденции в краткосрочной доходности рынков. Это исключение может быть проведено путем вычитания усредненного по 20 предыдущим дням значения краткосрочной доходности. Такое вычитание соответствует исключению месячной тенденции, т. е. исключению влияния всех процессов с характерным периодом месяц и более.

Ввиду большого разнообразия ARCH-моделей, частично описанного в разделе 2.1, выбор того или иного ее вида представляет собой самостоятельную проблему. В соответствии с идеями, развитыми в параграфе 2.3.2, для решения этой задачи обратимся к анализу автокорреляционных функций первого и второго порядка. В первую очередь необходимо убедиться в однородности исследуемого временного ряда, т. е. что на всем рассматриваемом интервале действует одна и та же модель.

Легко понять, что в случае исследуемого временного ряда условие однородности не выполняется. Действительно, рассмотрим автокорреляционные функции первого и второго порядков для динамики изменения дневной доходности рынка до 11 октября 1994 года («черный вторник») (рис. 3) и после него (рис. 4). Очевидно, автокорреляционные функции в двух случаях различны. Если до «черного вторника» они быстро

спадают и обращаются в нуль, начиная с $t = 4$, то после «черного вторника» они спадают намного медленнее. Таким образом, следует отдельно рассматривать динамику изменения дневной доходности доллара до «черного вторника» и после него.

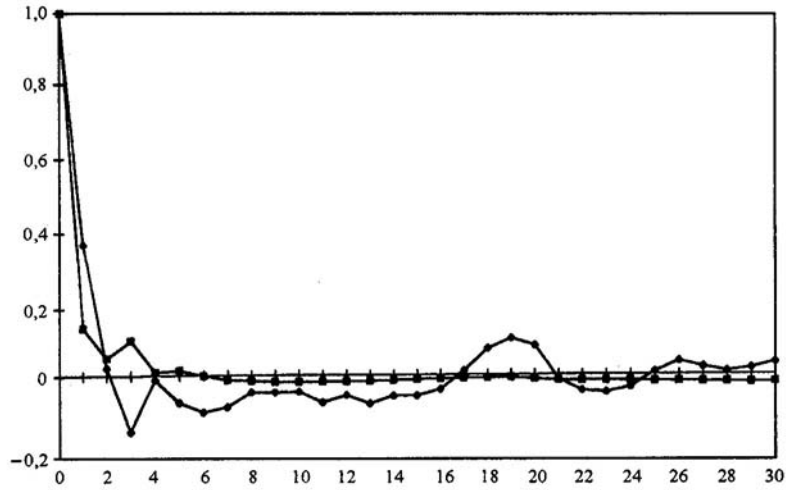


Рис. 3. Автокорреляционная функция краткосрочных изменений курса доллара к рублю до «черного вторника».

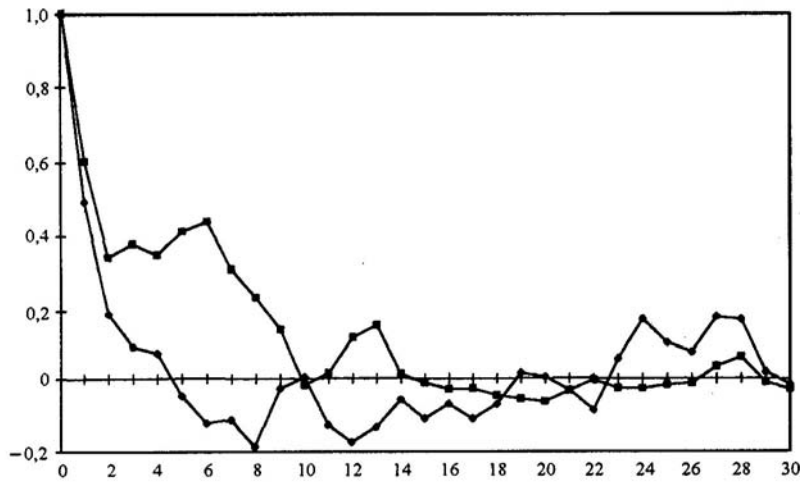


Рис. 4. Автокорреляционная функция краткосрочных изменений курса доллара к рублю после «черного вторника».

Однако здесь необходимо отметить, что даже после произведенного разделения нельзя быть уверенным, что полученные временные ряды являются статистически однородными. Тем не менее, вполне можно принять эту гипотезу, так как автокорреляционные функции динамики дневной доходности доллара за период с 11.10.94 по июнь 1995 (введение валютного коридора) и за период с июня по ноябрь 1995 года

имеют сходный общий вид. Правда, длина этих последних двух рядов является предельно малой с точки зрения вычисления автокорреляционной функции, и поэтому полученные значения этих функций в каждой точке подвержены большим флуктуациям.

Таким образом, мы получили автокорреляционные функции первого и второго порядков для двух временных рядов. Автокорреляционные функции первого ряда обращаются в нуль, начиная с $k = 4$ (с точностью, возможной при вычислении автокорреляционной функции для ряда такой длины). Из п. 2.3.2 следует, что таким поведением обладают модели типа $OCC(q)$. Поскольку последнее отличное от нуля значение автокорреляционных функций первого и второго порядка соответствует значению $t = 3$, модель может быть идентифицирована как $OCC(3)$.

Рассмотрим теперь второй временной ряд. Автокорреляционная функция первого порядка при $0 < k < 6$ проявляет хорошо выраженное экспоненциальное поведение. Далее ее поведение становится довольно нерегулярным. Автокорреляционная функция второго порядка сначала резко спадает, однако потом ее спад сильно замедляется. С учетом описанных особенностей можно идентифицировать модель, управляющую поведением исследуемого временного ряда, как Модель(1, 1, 0), подробно рассмотренную в п. 2.3.2. Действительно, согласно приведенным рассуждениям автокорреляционная функция первого порядка Модели(1, 1, 0) должна представлять собой спадающую экспоненту, в то время как автокорреляционная функция второго порядка представляется как сумма двух экспонент. Таким образом, легко объяснить поведение автокорреляционной функции второго порядка: сначала преобладает экспонента с большим по модулю отрицательным показателем. Эта экспонента быстро затухает, и на первый план выходит слагаемое с меньшим по модулю экспоненциальным показателем, которое убывает намного медленнее. Нерегулярное поведение автокорреляционной функции первого порядка при $k > 6$ можно объяснить флуктуациями оценок корреляционной функции и тем, что $b \neq 0$ (см. п. 2.3.2).

Таким образом, идентификация моделей приводит к следующему выводу: *первый временной ряд («до черного вторника») может быть идентифицирован как $OCC(3)$, т. е.*

$$r_t = c_1 \xi_{t-1} + c_2 \xi_{t-2} + c_3 \xi_{t-3} + \xi_t.$$

Второй временной ряд («после черного вторника») можно идентифицировать как Модель(1, 1, 0):

$$r_t = a_1 r_{t-1} + b_1 s_{t-1} + \xi_t,$$

$$s_t^2 = v_a r_{t-1}^2 + v_b s_{t-1}^2 + v_\xi.$$

3.2. Оценка параметров. Перейдем теперь к оценке параметров моделей, отобранных в предыдущем разделе. В нашем распоряжении есть два метода. Первый метод заключается в следующем: поскольку мы имеем оценки автокорреляционных функций первого и второго порядков, можно аналитически выразить их через параметры модели и, разрешив полученную систему уравнений, произвести искомые оценки параметров. Этот метод имеет смысл применять в том случае, если получающаяся система уравнений не является слишком сложной. Второй метод — это представленный в разделе 2.4 метод максимального правдоподобия. Его применение требует расчета функции правдоподобия и нахождения значения параметров, при которых она максимальна.

Первый временной ряд можно идентифицировать как $OCC(3)$. Для оценки соответствующих параметров применим первый метод. В этом случае система уравнений для их определения запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
v_r &= (1 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + v_1 + v_2 + v_3)v_\xi, \\
g(3) &= c_3 v_\xi, \\
g(2) &= (c_2 + c_1 c_3)v_\xi, \\
g(1) &= (c_1 + c_1 c_2 + c_3 c_2)v_\xi, \\
g_2(3) &= 2v_\xi^2(c_3^2 + v_3), \\
g_2(2) &= 2v_\xi^2[c_2^2 + v_2 + (c_3^2 + v_3)(c_1^2 + v_1) + 2c_1 c_2 c_3], \\
g_2(1) &= 2v_\xi^2[(c_1^2 + v_1)(c_2^2 + v_2) + (c_3^2 + v_3)(c_2^2 + v_2) + 2c_1 c_2(c_1 + c_3 + c_2 c_3)] = 0,
\end{aligned} \tag{31}$$

Решение этой системы удобно искать в переменных c_i , u_i , v_ξ , где $u_i = c_i^2 + v_i$. Разделим первые три уравнения на v_ξ , а последние четыре — на $2v_\xi^2$. Тогда

$$\begin{aligned}
h_0 &= 1 + u_1 + u_2 + u_3, \\
h_1 &= c_3, \\
h_2 &= c_2 + c_1 c_3, \\
h_3 &= c_1 + c_1 c_2 + c_1 c_3, \\
h_6 &= u_3, \\
h_5 &= u_2 + u_1 u_3 + 2c_1 c_2 c_3, \\
h_4 &= u_1 u_2 + u_2 u_3 + 2c_1 c_2(c_1 + c_3 + c_2 c_3),
\end{aligned}$$

где введены обозначения $h_0 = v_2/v_\xi$, $h_1 = g(1)/v_\xi$, $h_2 = g(2)/v_\xi$, $h_3 = g(3)/v_\xi$, $h_4 = g_2(1)/2v_\xi^2$, $h_5 = g_2(2)/2v_\xi^2$, $h_6 = g_2(3)/2v_\xi^2$. Таким образом, если известно v_ξ , то из второго, третьего и четвертого уравнений легко определить две ветви решения:

$(c_2)^+$ и $(c_2)^-$. Далее, из первого, пятого и шестого уравнений можно найти соответствующие значения $(u_2)^+$ и $(u_2)^-$. Таким образом, решения системы (31) могут

быть найдены аналитически с точностью до неизвестного параметра v_ξ . Этот параметр нетрудно определить численно из последнего, седьмого, уравнения системы.

Хотя мы получили два решения, одно из них является запрещенным, так как оно соответствует отрицательной дисперсии одного из коэффициентов. Следовательно, единственное решение системы (31) представляется как $c_1 = 0,7$; $c_2 = 0,3$; $c_3 = -0,3$; $v_1 = 0,02$; $v_2 = 0,06$; $v_3 = 0,4$; $v_\xi = 0,003$.

Второй временной ряд можно идентифицировать как Модель(1, 1, 0). Поскольку выразить автоковариационную функцию через параметры модели в случае неравенства $b \neq 0$ не удается, то воспользоваться первым из методов не представляется возможным. Однако с другой стороны, как было показано в разделе 2.4, в случае Модели($g, p, 0$) можно вычислить функцию правдоподобия (30). Поэтому для оценки параметров применим метод максимального правдоподобия.

Для Модели(1, 1, 0) функция правдоподобия имеет следующий вид:

$$L(a, b, \xi, v_a, v_b, v_\xi) = \sum_t \left(-\frac{(r_t - r_{2t})^2}{2u_t} - \frac{1}{2} \ln u_t \right),$$

где $r_{2t} = ar_{t-1} + bs_{t-1} + \xi$, $u_t = v_a r_{t-1}^2 + v_b s_{t-1}^2 + v + \xi$. Следуя методу максимального правдоподобия, необходимо найти значения параметров, для которых L принимает максимальное значение. Численный подход, основанный на методе покоординатного спуска, привел к следующим значениям параметров: $a = 0,2$; $b = -0,03$; $\xi = 0,00003$; $v_a = 0,4$; $v_b = 0,8$; $v_\xi = 0,0000004$. Заметим, что величина b близка к 0, что оправдывает предположения, сделанные при идентификации модели.

Заключение

Широкая распространенность ARCH-явлений на валютном рынке и в других секторах экономики побуждает исследователей искать причины их возникновения, исходя из общих принципов экономической теории. В данной работе с достаточно широких позиций сделана попытка построить модель, которая удовлетворительно объясняет появление концепции ARCH. В результате была предложена развернутая Модель (q, p, n) , которая является родственной ранее описанным ARCH-моделям и линейным моделям с флуктуирующими коэффициентами. По аналогии с родственными моделями можно попытаться создать теорию моделей типа Модель (q, p, n) . Однако это удастся сделать лишь для частных случаев Модели (q, p, n) . Тем не менее, полученные результаты можно эффективно использовать для анализа реального временного ряда. В работе такой анализ проведен для курса доллара на ММВБ с июня 1993 г. по октябрь 1995 г. Кроме того, для Модели $(q, p, 0)$ получен аналитический вид функции правдоподобия. В ходе анализа динамики краткосрочных изменений курса доллара было обнаружено, что в критической точке 11 октября 1994г. («черный вторник») вид модели, описывающей эту динамику, резко меняется, оставаясь, однако, в рамках класса Моделей (q, p, n) . Хотя оценка параметров моделей «до черного вторника» и «после черного вторника» требует совершенно различной техники, она может быть доведена до конца.

Основной трудностью проведенного исследования является невозможность получения аналитических результатов для Модели (q, p, n) общего вида. В связи с этим дальнейшее развитие этого направления, по всей видимости, может быть связано с обобщением соответствующих численных методов и их применения к анализу реальных временных рядов. В качестве продолжения исследований было бы желательно разработать методику вычисления дисперсии оценок параметров и распространить результаты работы на некоторые другие российские финансовые ряды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bachelier L.* Theorie de la speculation. — Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1900, v. 17, p. 21–86.
2. *Engle R. F.* Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of U.K. inflation. — *Econometrica*, 1982, v. 50, p. 987–1008.
3. *Bera A. K., Higgins M. L.* ARCH models: properties, estimation and testing. — *J. Econ. Surveys*, 1993, v. 7, p. 305–366.
4. *Rabemananjara R., Zakoian J. M.* Threshold ARCH models and asymmetries in volatility. — *J. Appl. Econometrics*, 1993, v. 8, p. 31–49.
5. *Adrangi B., Chatrath A.* The dynamics of palladium and platinum prices. — *Comput. Economics*, 2002, v. 19, p. 179–195.
6. *Ширяев А. Н.* Вероятностно-статистические модели эволюции финансовых индексов. — *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 1995, т. 2, в. 4, с. 527–555.
7. *Mantegna R. N., Stanley H. E.* An Introduction to Econophysics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

8. Бредихин А. А., Лоскутов А. Ю. Динамическое моделирование и финансовые временные ряды. — Физическая мысль России, 1997, т. 2/3, с. 104–112.
9. Бредихин А. А., Лоскутов А. Ю., Седых А. Б. К проблеме описания финансовых временных рядов. I. Линейные гомодинамические модели. — Вестник Московского ун-та, сер. физ.-астр., 2001, № 1, с. 10–12.
10. Бредихин А. А., Лоскутов А. Ю. К проблеме описания финансовых временных рядов. II. Модель ценообразования в условиях распределенного горизонта инвестирования. (В печати.)
11. Бредихин А. А., Лоскутов А. Ю. Динамический анализ рыночных процессов: модель курса акций ПАО «ЕЭС». (В печати.)
12. Bollerslev T. A generalized autoregressive conditional heteroscedasticity. — J. Econometrics, 1986, v. 31, p. 307–327.
13. Nelson D. B., Cao C. Q. Inequality constraints in the univariate GARCH model. — J. Business Econom. Statist., 1992, v. 10, p. 229–235.
14. Geweke J. Modelling the persistence of conditional variances: comment. — Econom. Rev., 1986, v. 5, p. 57–61.
15. Milhoj A. A conditional variance model for daily observation of an exchange rate. — J. Business Econom. Statist., 1987, v. 5, p. 99–103.
16. Higgins M. L., Bera A. K. A class of nonlinear ARCH models. — Internat. Econom. Rev., 1992, v. 33, p. 137–158.
17. Zakoian J.-M. Threshold heteroscedasticity model. — Mimeo. Paris: INSEE, 1990.
18. Engle R. F., Ng V. K. Measuring and testing the impact of news on volatility. — Mimeo. San Diego, 1991.
19. Hansen B. E. Autoregressive conditional density estimation. — Working Paper № 332. Rochester: Rochester Centre Econom. Res., 1992.
20. Box G., Jenkins G. Time Series Analysis. Forecasting and Control. San Francisco: Holden-Day, 1976.
21. Ширяев А. Н. Теория вероятностей. М.: Высшая школа, 1986.

Поступила в редакцию
22.IX.2003