

**К ПРОБЛЕМЕ САМООРГАНИЗАЦИИ:
МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ**© *А.Ю. Лоскутов, К.А. Васильев*

Московский Государственный Университет им.М.В.Ломоносова, физический факультет

Предложена математическая модель, описывающая образование некоторых структур, состоящих из заданных типов элементов и обладающих предписанными свойствами. В основу модели положен подход, при котором конечной сложной композиции ставится в соответствие динамическая система, сформированная из “элементарных” подсистем. Эта композиция (каскад) может быть однородной, т.е. состоять из идентичных компонентов, или иметь определенные неоднородности (дефекты). В качестве множества составляющих элементов рассматриваются одномерные отображения с хаотическим поведением. При этом требуется, чтобы весь каскад имел предписанный тип поведения.

Показано, что только небольшая часть полученных неоднородных каскадов может обладать заданным режимом эволюции. На основании результатов исследования проводятся параллели с процессами самоорганизации и формирования сложных молекул.

**TO THE SELF-ORGANISATION PROBLEM:
A MODEL OF FORMATION OF THE COMPLICATED FUNCTIONAL SYSTEMS***A. Loskutov, K. Vasiliev*

Physics Faculty, Lomonosov Moscow State University

A model describing the forming of some patterns with prescribed properties which consist of the given types of elements is proposed. This model is based on the approach when the final complicated composition corresponds to a dynamical system formed from “elementary” subsystems. This composition (cascade) can be both a homogeneous one, i.e. it can consist of identical components, and it can have certain nonhomogeneities (defects). As a set of components one-dimensional maps with chaotic behaviour are considered. Therewith, it is required that the whole cascade has the prescribed type of the behaviour.

It is shown that only a small part of the obtained nonhomogeneous cascades can possess the given evolutionary regime. On the basis of these results we draw a parallel with the self-organisation problem and formation of complex molecules.

1. Введение

Одной из задач теории самоорганизации является объяснение механизма образования сложных пространственных структур. Особенностью синтеза таких структур, состоящих из заданных типов достаточно простых элементов (например, полимерных цепочек), является тот факт, что лишь малая доля возможных комбинаций составляющих образует устойчивые и (с той или иной точки зрения) приемлемые формы. В попытке приблизиться к объяснению этого явления в данной работе предлагается подход, при котором пространственной сложной структуре ставится в соответствие динамическая система, сформированная из “элементарных” подсистем. В качестве множества составляющих элементов выбраны одномерные отображения — динамические системы с дискретным временем на вещественной прямой. Подход заключается в том, чтобы объединять отображения одного и того же семейства в некоторые функциональные каскады (условно говоря, цепочки) и исследовать зависимость динамики полученной сложно организованной системы от состава и порядка ее комплектующих. Естественно, при этом может быть сформировано очень большое число каскадов, отличающихся последовательностью составляющих. Основной качественной характеристикой построенной сложной системы является заданный режим ее поведения. Он может быть

стационарным или устойчивым периодическим с определенным периодом. Именно с этой точки зрения исследуются возможные композиции отображений.

Таким образом, в работе рассматриваются простые динамические системы, которые могут обладать как регулярными, так и хаотическими свойствами. Из них определенным путем синтезируется сложная динамическая система (каскад функционально сцепленных отображений). Если оказывается, что траектории такой системы притягиваются к устойчивой неподвижной точке или циклу некоторого конечного периода, то соответствующая ей сложная структура считается стабильной.

Известный эффект подавления хаоса и контролирования режима движения (см., например, [1–9] и приводимые там ссылки) представляет здесь первостепенный интерес, так как является одним из главных механизмов, лежащих в основе образования каскадов отображений с регулярной динамикой. В данном контексте под категорию подавления хаоса подпадают только те случаи возникновения устойчивых каскадов, когда все составляющие их подсистемы (отображения) являются хаотическими. Основной смысл состоит в том, чтобы рассмотреть системы с контролируемым поведением как бесконечную композицию отображений. Эта композиция (каскад) может быть однородной, т.е. состоять из идентичных компонентов, или иметь определенные неоднородности. В последнем случае (который является наиболее интересным) в каскаде некоторые из отображений замещаются отображениями с другими свойствами. Тогда, в зависимости от вида неоднородностей, каскад будет проявлять тот или иной тип динамики. Проблема состоит в том, чтобы исследовать возможность появления *регулярного* режима в неоднородном каскаде при *хаотическом* поведении его составляющих.

2. Последовательное развитие проблемы

Рассмотрим нарастание иерархии сложности систем, состоящих из одномерных отображений¹. Мы сосредоточим внимание на случаях, когда полученная система, будучи составленной из хаотических компонентов, обладает регулярной динамикой.

2.1. Отображения. В качестве базового элемента построений рассмотрим отображение T_a интервала I в себя, $T_a : I \rightarrow I$,

$$T_a : x \mapsto f(x, a), \quad (1)$$

где a — управляющий параметр из множества допустимых значений A . Один из путей исследования одномерных отображений использует теорию меры [11–13]. Согласно этой теории отображение T_a обладает хаотическим поведением, если оно имеет инвариантную меру. Дело в том, что множество I с мерой может быть рассмотрено как пространство элементарных событий. В этом случае каждая функция, определенная каким-либо образом в I , является случайной переменной, и последовательность итераций может быть описана как последовательность случайных величин.

Для некоторых преобразований T_a удается построить абсолютно непрерывную (относительно меры Лебега) инвариантную меру. В частности, для унимодального отображения T_a с отрицательным шварцианом $Sf = f'''/f' - 3(f''/f')^2/2 < 0$ существует абсолютно непрерывная инвариантная мера, если траектория критической точки x_c , начиная с некоторой итерации, совпадает с неустойчивым циклом (см. [12, 13] и цитируемую там литературу).

Введем параметрическое возмущение $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$,

$$G : a \mapsto g(a), \quad a \in \mathcal{A} \subseteq A. \quad (2)$$

¹Аналогичным образом можно получить результаты для многомерных отображений (см. [10]). Однако такая задача является намного более сложной и трудоемкой. Поэтому в данной работе мы остановили свой выбор на одномерных отображениях.

В этом случае семейство (1) можно записать как

$$\bar{T} : y \mapsto h(y), \tag{3}$$

где $y \in M \times \mathcal{A}$, $y = (x, a)$, $h(y) = (f(x, a), g(a))$. Используя определенный вид функции g , можно переводить систему на тот или иной режим движения. Поэтому часто возмущение вида (3) называют параметрическим управлением.

В данной работе рассматриваются только периодические возмущения. Используя период возмущений τ , из (2) найдем: $a_{i+1} = g(a_i)$, $i = 1, 2, \dots, \tau - 1$, $a_1 = g(a_\tau)$, $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$, $a_i \in \mathcal{A}$, $1 \leq i \leq \tau$. Далее, любому τ -периодическому параметрическому возмущению можно поставить в соответствие вектор $\hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau)$, $\hat{a} \in \mathbb{R}^\tau$. В этом случае множество $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{a} \in \underbrace{\mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \dots \otimes \mathcal{A}}_{\tau \text{ times}} : \hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau), a_i \neq a_j, 1 \leq i, j \leq \tau, i \neq j,$

$a_1, \dots, a_\tau \in \mathcal{A}\}$, $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^\tau$, будет соответствовать любому возможному возмущению с периодом τ , действующему на подмножестве \mathcal{A} . Заметим, что явная форма функции $g(a)$ в (2) несущественна. Для наших целей достаточно знать, что g преобразует последовательность значений параметра $\{a\}$ в неограниченный ряд повторяющихся подпоследовательностей $(a_1, a_2, \dots, a_\tau)$.

Как было показано (см. [7, 14]), период t любого цикла возмущенного отображения (3) будет всегда кратен периоду возмущений, $t = \tau k$, где k — некоторое целое число. Более того, пусть $f_i = f(x, a_i)$, $i = 1, 2, \dots, \tau$. Тогда, вводя τ функций $F_1 = f_\tau \circ f_{\tau-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1$, $F_2 = f_1 \circ f_\tau \circ f_{\tau-1} \circ \dots \circ f_2$, \dots , $F_\tau = f_{\tau-1} \circ f_{\tau-2} \circ \dots \circ f_1 \circ f_\tau$, можно записать для возмущенного отображения

$$\bar{T}_{\hat{a}} = \begin{cases} T_{\hat{a}}^1 : x \mapsto F_1(x, \hat{a}) , \\ T_{\hat{a}}^2 : x \mapsto F_2(x, \hat{a}) , \\ \dots \dots \dots , \\ T_{\hat{a}}^\tau : x \mapsto F_\tau(x, \hat{a}) . \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, легко видеть, что исследование неавтономного возмущенного семейства (3) сводится к изучению τ автономных отображений. Поскольку эти τ отображений связаны только через начальные условия, то для получения информации о динамике в целом достаточно рассмотреть лишь одно из них.

У т в е р ж д е н и е 1. *Предположим, что отображение (3) удовлетворяет следующим условиям: 1) существует подмножество $\sigma \subset M$ такое, что для любых $x_1, x_2 \in \sigma$ найдется значение $a^* \in \mathcal{A}$, для которого $f(x_1, a^*) = x_2$; 2) существует критическая точка $x_c \in \sigma$ такая, что $\partial f(x, a) / \partial x \Big|_{x=x_c} \equiv D_x f(x_c, a) = 0$ при любом $a \in \mathcal{A}$.*

Тогда для любых $x_2, x_3, \dots, x_\tau \in \sigma$ найдутся такие x_1 и a_1, a_2, \dots, a_τ , что цикл $(x_1, x_2, \dots, x_\tau)$ будет устойчивым циклом возмущенного отображения $\bar{T}_{\hat{a}}$ при $\hat{a} = (a_1, \dots, a_\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольные величины x_1, x_2, \dots, x_τ . В силу условия 1) система уравнений $f(x_1, a_1) = x_2$, $f(x_2, a_2) = x_3, \dots, f(x_\tau, a_\tau) = x_1$ относительно параметрических значений a_1, a_2, \dots, a_τ имеет решение вида $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\tau)$. Это означает, что последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_\tau) = p$ является циклом периода τ отображения $\bar{T}_{\hat{a}}$ при периодическом возмущении $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\tau)$. Чтобы этот цикл p сделать устойчивым, достаточно взять элемент x_1 близким к критическому значению x_c , поскольку $\beta(p) = \prod_{i=1}^{\tau} D_x f(x_i, a_i)$ и $D_x f(x_c, a) = 0$ при любом a . Это гарантирует выполнение критерия устойчивости $|\beta(p)| < 1$.

Утверждение 1 доказано.

Таким образом, согласно этому результату, для отображений с критическими точками возможно найти возмущения, которые стабилизируют заданные циклы. Нетрудно найти условия на уровень внешнего шума, который не разрушил бы такие стабилизированные циклы (см. [10]).

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть $f(x, a) \in C^2[M \times A]$ и возмущенное отображение $\bar{T}_{\hat{a}}$ при $\hat{a} = (a_1, a_2, \dots, a_\tau)$ имеет устойчивый цикл периода τ , $p = (x_1, x_2, \dots, x_\tau)$. Тогда, если

$$|\Delta a_i| \leq \delta_a = \frac{1}{t S_a L S_x^{\tau-1} \sum_{i=1}^{\tau} S_x^i},$$

где $i = 1, 2, \dots, \tau$, $S_a = \max_{x,a} |D_a f(x, a)|$, $L = \max_{x,a} |D_x^2 f(x, a)|$, $S_x = \max_{x,a} |D_x f(x, a)|$, то это отображение имеет также устойчивый цикл $p' = (x_c + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_\tau + \Delta x_\tau)$ периода τ при $\hat{a}' = (a_1 + \Delta a_1, a_2 + \Delta a_2, \dots, a_\tau + \Delta a_\tau)$, причем

$$|\Delta x_i| \leq \delta_x = \frac{1}{L S_x^{\tau-1}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим сначала, что все значения a_i являются возмущенными, $a'_i = a_i + \Delta a_i$. Найдем изменение $\Delta x_1 = x'_1 - x_c$. При этом x'_1 должно быть неподвижной точкой отображения T_1 (см. (5)), т.е. $x'_1 = F_1(x'_1, a'_1, a'_2, \dots, a'_\tau)$. Тогда $x_c + \Delta x_1 = F_1(x_c, a_1, a_2, \dots, a_\tau) + D_x F_1(x_c, \hat{a}) \Delta x_1 + \sum_{i=1}^{\tau} D_{a_i} F_1(x_c, \hat{a}) \Delta a_i$. Отсюда, с учетом соотношений $x_c = F_1(x_c, \hat{a})$ и $D_x F_1(x_c, \hat{a}) = \beta(p) = 0$ находим, что $\Delta x_1 = \sum_{i=1}^{\tau} \prod_{l=i+1}^{\tau} D_x f(x_l, a_l) D_a f(x_i, a_i) \Delta a_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\Delta x_1| &\leq \delta_a \sum_{i=1}^{\tau} \prod_{l=i+1}^{\tau} \left| D_x f(x_l, a_l) \right| \left| D_a f(x_i, a_i) \right| \leq \\ &\leq \delta_a \tau S_a \sum_{i=1}^{\tau} S_x^i. \end{aligned} \tag{5}$$

Оценим, как при этом изменится мультипликатор цикла: $\beta(p') - \beta(p) = \beta(p') = \prod_{i=1}^{\tau} D_x f(x'_i, a'_i) = \sum_{i=1}^{\tau} D_x^2 f(x_i, a_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{\tau} D_x f(x_l, a_l) \Delta x_i + \sum_{i=1}^{\tau} D_{a_x}^2 f(x_i, a_i) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{\tau} D_x f(x_l, a_l) \Delta a_i$. В обеих суммах ненулевыми являются только первые члены, поскольку $D_x f(x_1, a_1) = D_x f(x_c, a_1) = 0$. Поэтому $\beta(p') = \left[D_x^2 f(x_c, a_1) \Delta x_1 + D_{a_x}^2 f(x_c, a_1) \Delta a_1 \right] \prod_{l=2}^{\tau} D_x f(x_l, a_l)$. Однако $D_{a_x}^2 f(x_c, a_1) = D_a \left(D_x f(x_c, a) \right) \Big|_{a=a_1} = D_a(0) = 0$. Следовательно, находим $|\beta(p')| = |\Delta x_1| \left| D_x^2 f(x_c, a_1) \right| \prod_{l=2}^{\tau} \left| D_x f(x_l, a_l) \right|$. Для устойчивости цикла необходимо выполнение неравенства $|\Delta x_1| \left| D_x^2 f(x_c, a_1) \right| \prod_{l=2}^{\tau} \left| D_x f(x_l, a_l) \right| \leq |\Delta x_1| L S_x^{\tau-1} < 1$. Отсюда следует, что $|\Delta x_1| \leq \delta_x = 1/(L S_x^{\tau-1})$.

Таким образом, если возмущение Δx_1 будет меньше величины δ_x , то цикл останется устойчивым. Но максимально возможное изменение Δx_1 при возмущении параметров на величину δ_a задается неравенством (5). Поэтому условие на δ_a можно записать как

$$\delta_a \tau S_a \sum_{i=1}^{\tau} S_x^i = \frac{1}{L S_x^{\tau-1}}$$

или

$$\delta_a = \frac{1}{tS_a L S_x^{\tau-1} \sum_{i=1}^{\tau} S_x^i}.$$

Утверждение 2 доказано.

Полученные с помощью этого утверждения оценки позволяют в каждом конкретном случае эффективно определять предельно допустимые ошибки в задании необходимых управляющих параметров. Следовательно, нетрудно выделить класс конкретных отображений с управляемым поведением.

Введем подмножество $A_c \subset A$ такое, что при $a \in A_c$ отображение (1) проявляет те или иные хаотические свойства. В этом случае параметрическая стабилизация хаотического поведения заключается в том, чтобы найти такие внешние возмущения (2), при которых динамическая система характеризовалась бы нужным (устойчивым периодическим или устойчивым стационарным) поведением. Это означает, что для отображения (1) с условием $a \in A_c$ необходимо определить такое возмущение G , действующее на хаотическом множестве A_c , $G : A_c \rightarrow A_c$, чтобы результирующее возмущенное отображение обладало устойчивыми циклами (или неподвижными точками).

В ряде работ (см. [7, 14]) в этом направлении был получен важный результат, который сводится к следующему. Существует подмножество $\hat{A}_d \subset \hat{A}_c$ такое, что если $\hat{a} \in \hat{A}_d$, то некоторые семейства периодически возмущенных отображений будут обладать устойчивыми циклами конечных периодов. При этом, очевидно, что множество параметрических значений $\hat{a} \in \hat{A}_d$, для которых в периодически возмущаемых семействах существуют устойчивые циклы, открыто.

Рассмотрим в качестве примера хорошо известное семейство квадратичных отображений $q_a : [0, 1] \mapsto [0, 1]$,

$$q_a : x \mapsto ax(1-x), \quad (6)$$

где $a \in A = (0, 4]$. Поскольку любое унимодальное отображение является полусопряженным квадратичному, семейство (6) играет достаточно важную роль в теории унимодальных отображений. Кроме того, выбор объясняется тем фактом, что преобразования (6) широко используются как приближенная модель многих физических, химических и других сложных процессов (см., например, [15, 16] и приведенные там ссылки).

Семейство отображений (6) достаточно хорошо изучено. В частности, был получен замечательный результат о том, что множество значений параметра a , для которых квадратичное отображение хаотично, обладает положительной мерой Лебега (см. [13]). Следствием из этого утверждения является важная теорема Якобсона [17]:

Пусть F — одномерное отображение, близкое в C^3 норме к отображению $x \mapsto x(1-x)$, и a_0 — значение параметра a такое, что $a_0 F(x_c) = 1$. Тогда мера множества $A_c = \{a \in (0, a_0] \mid F_a : x \mapsto aF(x) \text{ имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру}\}$ является положительной.

Нетрудно заметить, что семейство (6) удовлетворяет всем утверждениям, описанным выше. Более того, для отображения (6) была строго доказана возможность подавления хаоса (см. [5, 9]) посредством периодических параметрических воздействий. Именно, найдутся такие значения $\hat{a} \in \hat{A}_d \subset \hat{A}_c$, что возмущенное отображение будет обладать устойчивыми циклами.

Таким образом, данные результаты показывают, что определенные периодические параметрические возмущения приводят к подавлению хаоса и рождению устойчивого поведения в семействах одномерных отображений.

Тогда получим τ каскадных функций F_1, F_2, \dots, F_τ , которые определяются композициями, состоящими из компонент $f_i, i = 1, 2, \dots, \tau$, отличающихся только значениями параметров. Стало бытъ, циклический каскад управляемых автоматов можно записать как $K_\tau = F_j \circ F_j \circ \dots$, где j принимает любое значение из множества $(1, 2, \dots, \tau)$. Очевидно, данный каскад имеет длину τ . Таким образом, циклический каскад состоит из неограниченной композиции τ автоматов, каждый из которых управляется своим собственным параметром $a_i, i = 1, \dots, \tau$ (см.(8)). Следовательно, исходный автомат \bar{T}_a можно разложить на $T_i, i = 1, 2, \dots, \tau$, автоматов (см. §2.1):

$$\begin{aligned} T_a^1 : x &\mapsto F_1(x, \hat{a}) , \\ T_a^2 : x &\mapsto F_2(x, \hat{a}) , \\ &\dots \dots \dots , \\ T_a^\tau : x &\mapsto F_\tau(x, \hat{a}) , \end{aligned} \tag{10}$$

зависимость которых друг от друга задается лишь соотношениями $x_1 = f_1(x_0), \dots, x_{\tau-1} = f_{\tau-1}(x_{\tau-2})$.

Теперь нетрудно переформулировать результаты, полученные в предыдущем пункте, на язык автоматов. В частности, легко понять, что если циклический каскад, задаваемый автоматом T_a^k (10), $1 \leq k \leq \tau$, обладает периодической динамикой периода t , то циклический каскад, определяемый автоматом $T_a^m, m = k + 1 \pmod{\tau}$, также обладает периодической динамикой периода t . Более того, если динамика T_a^k устойчива, то динамика T_a^m также будет устойчивой. Одновременно период P осцилляции циклического каскада всегда кратен его длине $\tau, P = \tau k$, где k — положительное целое.

В данном контексте уместно расширить сформулированную в [18] проблему до *хаотической* динамики компонент каскада. Именно, при каких условиях поведение циклического каскада является регулярным (осцилляторным или конвергентным), если его компоненты (т.е. составляющие его автоматы) обладают хаотической динамикой? Допустим, что параметр a принимает значения только из подмножества $A_c, a \in A_c \subset A$, соответствующего *хаотическому* поведению всех m автоматов (7). Могут ли компоненты $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, m$, определять *регулярное* поведение циклического каскада K_m ?

Очевидно, для управляемых автоматов выбор параметрических значений \hat{a} из подмножества $A_d \subset A_c$ обеспечит периодическую динамику циклического каскада K_τ .

2.3. Каскады с дефектами. Дальнейшее развитие задачи приводит к необходимости рассмотреть так называемые каскады с дефектами и их динамические свойства. Эти каскады сформированы из тех же каскадных функций F_i , но отличаются тем, что содержат "неоднородности" в виде функций с другим индексом.

Формально циклические каскады с дефектами являются композициями каскадных функций F_i и представляют собой отображения, но следующего сложного вида: $\Phi_l = \underbrace{F_i \circ F_i \circ \dots \circ F_i}_{l-1} \circ F_j$. Например,

$$\underbrace{F_i \circ F_i \circ F_j}_{l-1} \circ \underbrace{F_i \circ F_i \circ F_j}_{l-1} \circ \dots = \Phi_3 \circ \Phi_3 \circ \dots \tag{11}$$

или

$$\underbrace{F_i \circ F_i \circ F_i \circ F_j}_{l-1} \circ \underbrace{F_i \circ F_i \circ F_i \circ F_j}_{l-1} \circ \dots = \Phi_4 \circ \Phi_4 \circ \dots \tag{12}$$

Фактически, в терминах *временного* воздействия (т.е. при рассмотрении отображений (1) при периодическом возмущении (2)) это означает, что компоненты f_i и f_j при составлении последовательных "цепочек" (11), (12) периодически меняются местами.

Следуя работе [20], будем говорить, что циклический каскад (11) или (12) является *циклическим каскадом с дефектом*. Число идентичных каскадных функций (композиций) F_i между двумя произвольными соседними функциями F_j , $i \neq j$, включающее только одну из них, называется (*минимальной*) *длиной* l циклического каскада с дефектом. Например, для циклического каскада с дефектом вида (11) $l = 3$, а для каскада вида (12) $l = 4$.

Возникает важный вопрос: каким образом дефекты могут изменить динамику циклического каскада? Более точно, какова должна быть наименьшая длина l циклического каскада с дефектом, чтобы он сохранял прежнюю регулярную (периодическую или конвергентную) динамику соответствующего циклического каскада без дефекта? Дело в том, что нарушение последовательности в циклических каскадах может привести к полному разрушению регулярного поведения. Решение именно этого вопроса позволит подойти к проблеме самоорганизации с оригинальной точки зрения.

В принципе, применяя описанный в предыдущих пунктах математический аппарат, исследование циклических каскадов с дефектом можно выполнить аналитически. Для этого необходимо произвести декомпозицию (10) исходного каскада и определить τ каскадных функций в их явной форме. Однако, в отличие от каскадов без дефектов, когда достаточно рассмотреть только одну каскадную функцию F_i , в данном случае, чтобы решить уравнения неподвижных точек, необходим анализ гораздо более сложного уравнения. Для циклических каскадов длины l , очевидно, такая функция будет задаваться соотношением $F_i^1 \circ F_i^2 \circ \dots \circ F_i^{l-1} \circ F_j$.

3. Агрегаты каскадов с дефектами

Обобщение описанных выше задач подводит к формулировке новой проблемы, прямо отражающей тему данной работы — исследование явления самоорганизации. Структурная сложность этой проблемы выходит на новую ступень по сравнению с задачами, описанными выше. Речь идет о динамике каскадов сцепленных отображений, состоящих из отрезков Φ_l разной длины l и их циклических обобщениях. Рассмотрим набор элементов $\{\Phi_l\}$, которые объединяются в один каскад в определенном порядке (условно говоря, "цепочку"), образуя композицию вида $\Psi_{i_1, \dots, i_k} = \Phi_{i_1} \circ \dots \circ \Phi_{i_k}$. Тогда соответствующий циклический каскад $K(\Psi_{i_1, \dots, i_k})$ запишется как неограниченная композиция $\underbrace{\Phi_{i_1} \circ \dots \circ \Phi_{i_k}}_k \circ \underbrace{\Phi_{i_1} \circ \dots \circ \Phi_{i_k}}_k \circ \dots$.

Очевидно, с точки зрения теории динамических систем Ψ также является отображением, но еще более высокой сложности. Таким образом, нас интересует тип динамики Ψ в зависимости от свойств составляющих элементов, конфигурация которых кратко записывается в виде целочисленного вектора $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_k\}$, где i_1, \dots, i_k — длины (вообще говоря, различные) каждого из каскадов $\Phi_{i_1}, \dots, \Phi_{i_k}$, составляющих комбинацию Ψ , соответственно.

3.1. Результаты численного моделирования. Остановимся на простейшем случае $\tau = 2$ (который, в отличие от отображений, для циклических каскадов с дефектом является достаточно сложным). Тогда существует лишь две композиции (каскадные функции): $F_1 = f_2 \circ f_1$ и $F_2 = f_1 \circ f_2$. Таким образом, можно составить циклические каскады длины 2 следующего вида:

$$f_1 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_1 \circ f_2 \circ \dots \quad (13)$$

и

$$f_2 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_1 \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 \circ \dots \quad (14)$$

В терминах каскадных функций F_i они будут записаны в виде $F_2 \circ F_2 \circ F_2 \circ \dots$ и $F_1 \circ F_1 \circ F_1 \circ \dots$. Легко построить примеры соответствующих циклических каскадов с дефектом

из соотношений (13) и (14), если положить $i = 1, j = 2$. Теперь необходимо найти такую минимальную длину l циклического каскада с дефектом, чтобы он проявлял регулярную динамику. В качестве критерия хаотичности будем использовать показатель Ляпунова.

Если функции f_1 и f_2 выбрать такими, чтобы они удовлетворяли результатам п.2.1, то ответ легко получить, опираясь на следующий точный результат (см. [20]): циклический каскад двух хаотических автоматов, задаваемых функциями f_1 и f_2 , проявляет устойчивую периодическую динамику с периодом $P = 2k, k = 1, 2, \dots$.

Иными словами, данное утверждение обеспечивает взаимное подавление хаотичности двух автоматов, если один из них функционально действует на другой, и наоборот, второй автомат функционально действует на первый.

В данной работе для изучения циклических каскадов Ψ мы ограничились функциями F , состоящими только из двух компонент f_i и f_j , отличающихся значениями параметров в соотношении (6). Рассматривались композиции Ψ , составленные из только двух, трех и четырех Φ_{i_k} , т.е. каскады $\Psi_{i_1, i_2}, \Psi_{i_1, i_2, i_3}, \Psi_{i_1, i_2, i_3, i_4}$. Очевидно, с ростом длины каскадов время численного анализа очень быстро возрастает.

Масштабное численное исследование, проведенное для обнаружения сложных *регулярных* циклических каскадов Ψ_{i_1, \dots, i_k} охватывало 4950 точек на прямоугольной решетке в параметрическом пространстве $(a_1, a_2), a_1, a_2 \in [3, 8; 4]$, отображения f . Для каждой из этих точек были рассмотрены все комбинации Ψ , соответствующие векторам $\mathbf{i} = \{i_1, \dots, i_k\}$ размерностей 2, 3, 4 и с длинами компонент i_k от 2 до 10. Таким образом, были изучены циклические каскады вида $\Psi_{i_1, i_2} = \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2}, \Psi_{i_1, i_2, i_3} = \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \Phi_{i_3}, \Psi_{i_1, i_2, i_3, i_4} = \Phi_{i_1} \circ \Phi_{i_2} \circ \Phi_{i_3} \circ \Phi_{i_4}$, где $\Phi_l = \underbrace{F_i \circ F_i \circ \dots \circ F_i}_{l-1} \circ F_j$.

В каждом случае численно определялся показатель Ляпунова полученного отображения Ψ . Очевидно, объем вычислений для данной размерности вектора \mathbf{i} с учетом игнорирования комбинаций, эквивалентных относительно циклической перестановки, пропорционален $(\max i)^k / k$, где k — размерность вектора \mathbf{i} (в нашем случае это 2, 3 или 4). В итоге общее число исследованных каскадов составило 4752000.

В ходе моделирования отфильтровывалась информация о циклических каскадах Ψ_{i_1, \dots, i_k} , которые имели только регулярную динамику. Их обнаружилось достаточно мало по сравнению с общим числом рассмотренных — только 344.

Например, для параметров $a_1 = 3.907, a_2 = 3.922$ (легко проверить, что при этих значениях отображение (6) хаотично) регулярную динамику имеют следующие каскады:

Каскад	Структура	Показатель Ляпунова
$\Psi_{3,2}$	$\Phi_3 \circ \Phi_2$	-0,127
$\Psi_{2,5,4}$	$\Phi_2 \circ \Phi_5 \circ \Phi_4$	-0,130
$\Psi_{2,5,6,4}$	$\Phi_2 \circ \Phi_5 \circ \Phi_6 \circ \Phi_4$	-0,065
$\Psi_{3,3,6,6}$	$\Phi_3 \circ \Phi_3 \circ \Phi_6 \circ \Phi_6$	-0,025

Естественно, что все последовательности цепочек, получаемые из найденных циклической перестановкой компонент, также будут устойчивыми.

На исследованном параметрическом множестве двумерных каскадов Ψ_{i_1, i_2} , обладающих устойчивой динамикой, оказалось 87 (т.е. 0,00048 от общего числа $4950(10-1)(10-2)/2 = 178200$ рассмотренных комбинаций). Количество трехмерных каскадов составляет $\Psi_{i_1, i_2, i_3} = 94$ (0,00011 от общего числа $4950(10-1)(10-2)(10-3)/3 = 831600$). Четырехмерные каскады $\Psi_{i_1, i_2, i_3, i_4}$ встретились только 163 раза (т.е. их число составило 0,00004 от общего количества $4950(10-1)(10-2)(10-3)(10-4)/4 = 3742200$). В силу механизма выхода траектории на устойчивый цикл и ограниченного интервала наблюдения за траекториями приведенные оценки являются оценками сверху и могут быть несколько улучшены.

Проиллюстрируем полученные результаты простыми примерами. Рассмотрим циклический каскад с дефектом, состоящий из автоматов, задаваемых квадратичной функцией

(б). В соответствии с результатами, изложенными выше, выберем параметрические значения a_1, a_2 такими, чтобы каждый из автоматов в отдельности имел хаотическое поведение, но циклический каскад, составленный из них, проявлял регулярную динамику. Численные исследования привели к следующим результатам.

Для точек Огнева–Мисюревича $a_1 = 3,67857336\dots$, $a_2 = 3,97459125\dots$, $a_1, a_2 \in A_c$, (эти параметрические значения соответствуют случаю, когда критическая точка попадает в неустойчивую неподвижную точку) регулярная динамика циклического каскада Φ разрушается единственным дефектом (рис.1). Тренд ляпуновского показателя позволяет предположить, что устойчивая динамика возможна, если $l > 10^5$.

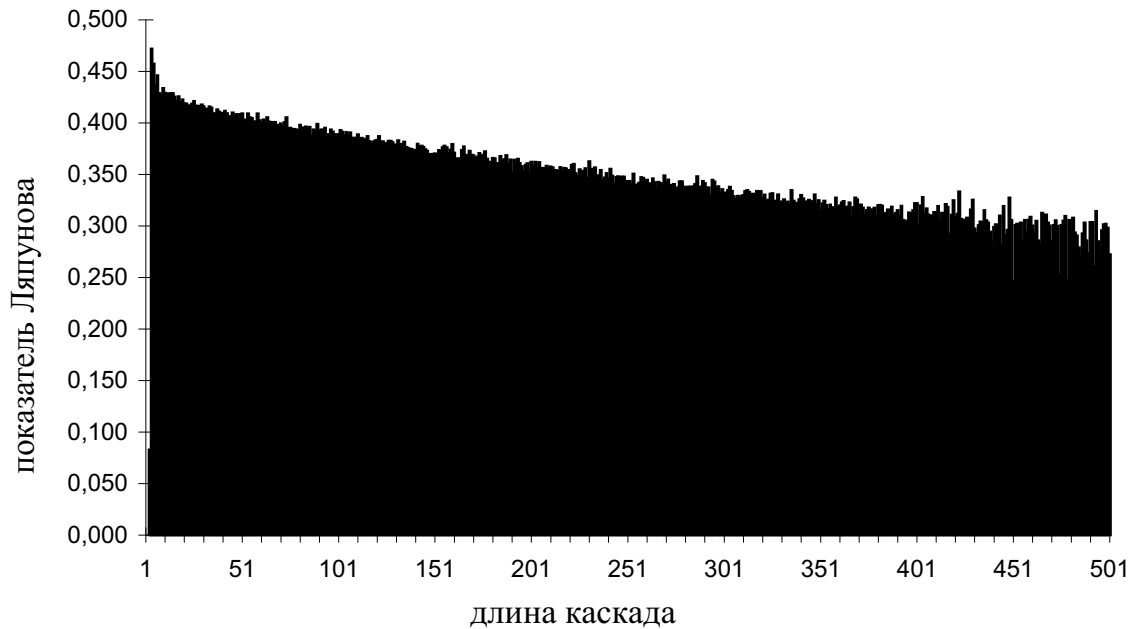


Рис. 1. Значения показателя Ляпунова для точек Огнева–Мисюревича $a_1 = 3,67857336$, $a_2 = 3,97459125$.

Для параметрических значений ($a_1 = 3,978$, $a_2 = 4$, $a_1, a_2 \in A_c$) устойчивая периодическая динамика каскада с дефектом проявляется в случае, если его длина удовлетворяет соотношению $l = 3n + 3$, где $n = 2, 3, \dots$, (рис.2). Когда $n = 0$ ($l = 3$) и $n = 1$ ($l = 6$), динамика остается хаотической, но значение показателя Ляпунова на этих длинах существенно меньше.

Интересен результат для значений параметров a_∞ и $a = 4, 0$. Тогда получится каскад, в котором как бы перемешаны хаос и поведение с бесконечно большим периодом. Для такой параметрической точки регулярная значения показателя Ляпунова показаны на рис.3.

Наконец, приведем результат расчета для параметров $a_1 = 3,752685$, $a_2 = 3,955848$, $a_1, a_2 \in A_c$ (рис.4). Видно, что в этом случае регулярная динамика каскада с дефектом наблюдается только если его длина l четная.

Обобщения этих результатов позволяют сделать вывод, что при достаточно большой длине циклического каскада с дефектом его динамика всегда будет периодической, хотя в некоторых случаях l может оказаться чрезвычайно большим (как, например, для точек Огнева–Мисюревича). Таким образом, возможно строить каскады хаотических автоматов с предсказуемым периодическим поведением. Кроме того, поскольку ряд из исследованных параметрических точек удовлетворяет результатам, описанным в §2, такие каскады не будут разрушены малыми шумами.

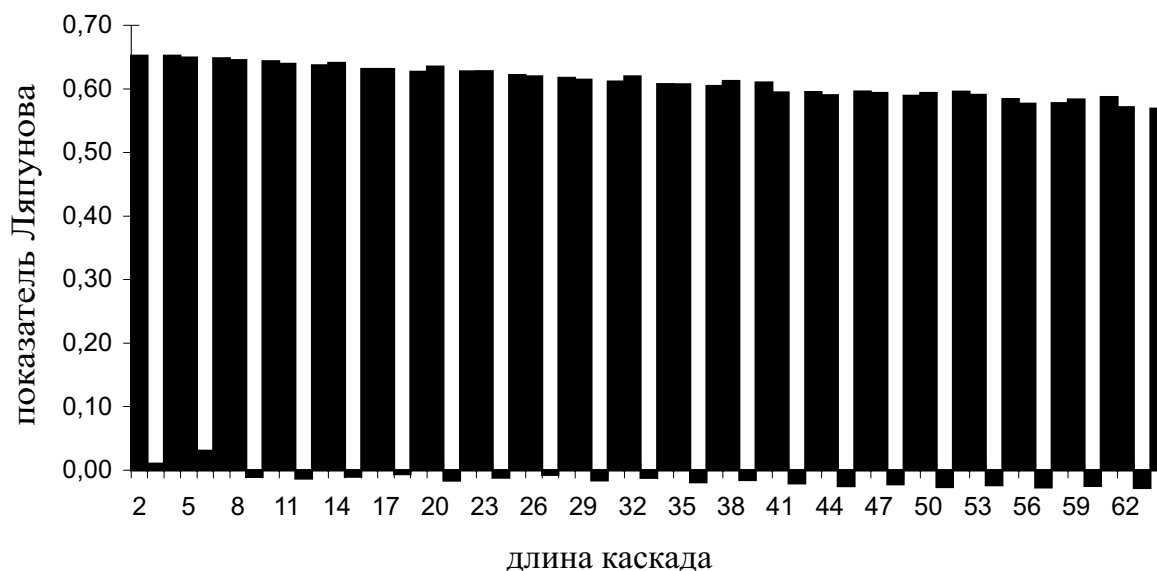


Рис. 2. Значения показателя Ляпунова для точек $a_1 = 3,978$, $a_2 = 4$.

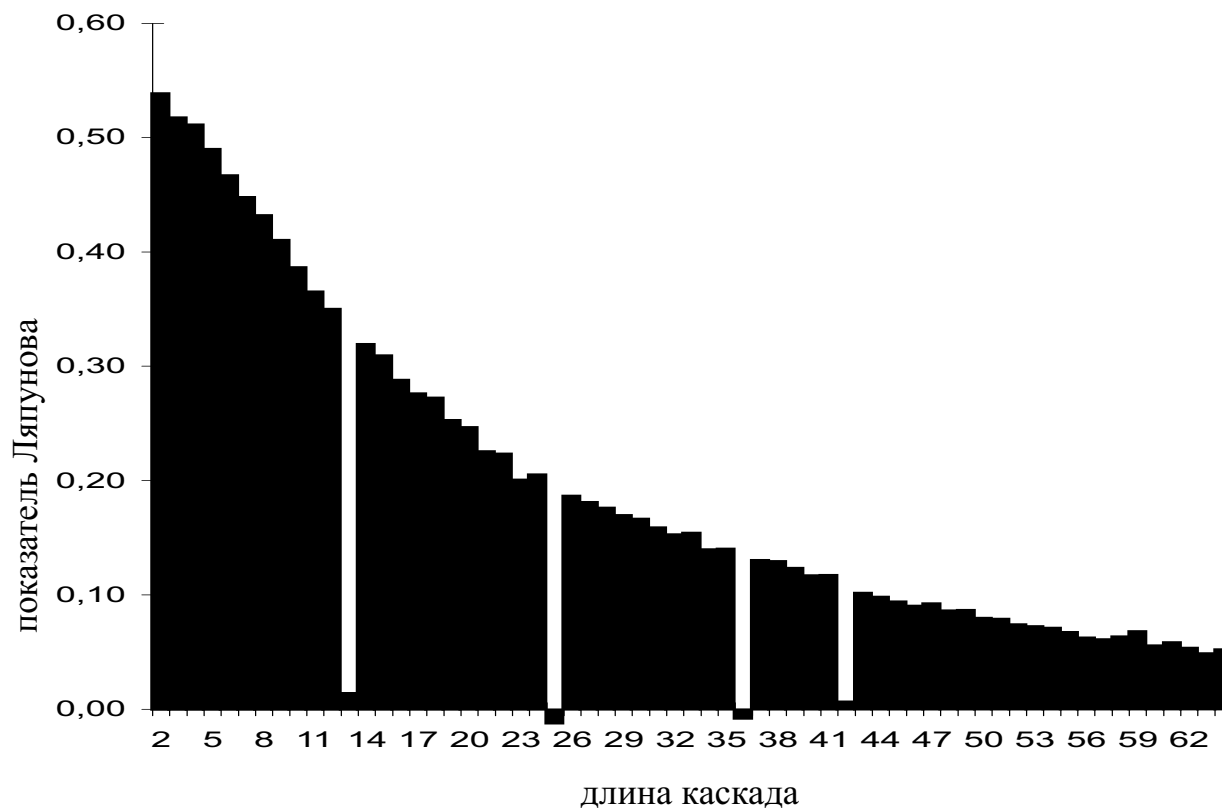


Рис. 3. То же, что на рис.2, при $a_1 = 3,5699456$ и $a_2 = 4$.

4. Трактовка результатов с точки зрения самоорганизации

Таким образом, появление агрегатного каскада с заданной динамикой из произвольных компонент крайне маловероятно. Этот результат интересен с точки зрения приложе-

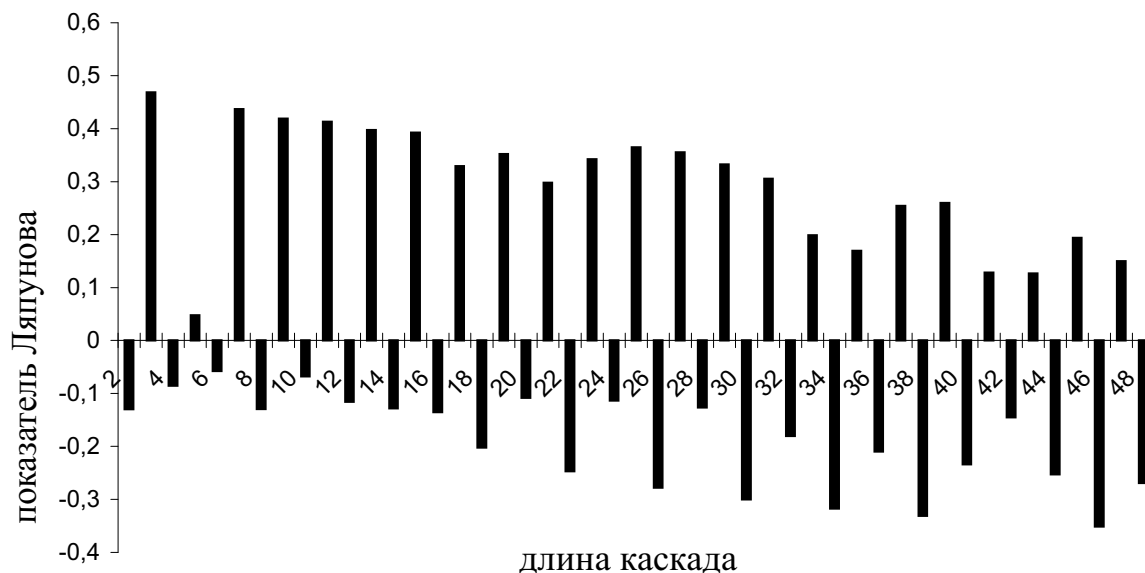


Рис. 4. То же, что на рис.2, при $a_1 = 3,752685$ и $a_2 = 3,955848$.

ния к объяснению возникновения сложно организованных структур (например, полимеров). Кроме того, нетрудно заметить определенную аналогию между каскадами отображений и структурой биомолекул. Естественно, строя такую аналогию, можно говорить лишь о попытке воспроизвести построение самой стабильной структуры, которая как раз и может быть описана в терминах последовательности элементов.

В результате исследования подтверждаются соображения о том, что случайное выстраивание стабильной цепочки элементов есть крайне маловероятное событие. Лишь небольшая часть комбинаций базовых элементарных динамических систем обладает заданным типом поведения. Более того, если дополнительно потребовать, чтобы каскад к дефектом обладал периодическим поведением нужного периода, то число таких комбинаций сильно уменьшается.

Этот факт позволяет предложить механизм, лежащий в основе образования сложных структур, состоящих из небольшого количества элементарных подсистем. Рассмотренные в настоящей работе циклические каскады с дефектами могут получить применение в попытках объяснить пространственно-временное упорядочение и возможность самоорганизации в дискретных структурах. Рассмотрим, например, следующую модельную задачу.

Пусть имеется большой сосуд, содержащий определенные “системы”, представляющие собой каскады отображений разных длин с заданным типом временной динамики. Предположим для определенности, что могут существовать (являются устойчивыми) только цепочки с регулярным поведением. Тогда для двухкомпонентного случая f_1, f_2 в сосуде могут находиться каскады вида

$$ab, abb, abbb, abbbb, \dots, \quad (15)$$

где $a \equiv F_1, a \equiv F_2$. Обозначим эти всевозможные каскады как A, B, C, \dots , т.е. представим этот набор в виде алфавита. Допустим, что цепочки имеют возможность время от времени случайным образом последовательно соединяться друг с другом. Тогда в результате большого числа попыток такого слияния начальных простых элементов могут образоваться длинные комплексы с упорядоченной динамикой, например $ababbbabbabb$ ($ADBC$ в буквенном выражении). В дальнейшем такая цепочка может еще увеличиваться, присоединяя к себе все новые и новые элементы из сосуда (15). Критерием отбора здесь является устойчивая динамика и неприемлемость хаоса для цепочки.

Численные исследования показывают, что на этом пути можно добиться создания достаточно сложных структур с заданными свойствами. Более того, если обобщить задачу и рассмотреть возможность построения пространственно-временных структур, то можно обнаружить ряд закономерностей в соотношении между порядком и хаосом.

5. Заключение

Развитие теории динамических систем внесло много нового в понимание происхождения хаотичности. В частности, было обнаружено, что хаос встречается в подавляющем большинстве нелинейных систем. Поэтому в ряде случаев его развитие может быть нежелательным. В связи с этим в последнее время интенсивно разрабатывается новое направление в теории детерминированного хаоса, связанное с возможностью подавления хаотического поведения. Если достаточно слабо (аддитивно или мультипликативно) возмущать хаотическую систему (иными словами, производить обмен энергией между системой и окружающей средой), то хаос может выродиться в регулярное движение. Развитие этого направления привело к появлению новых замечательных приложений и позволило рассмотреть многие проблемы нелинейной динамики под новым углом зрения.

Так, подход к решению одной из старых проблем — описание явления самоорганизации, т.е. образования и развития сложных упорядоченных структур, — в рамках теории детерминированного хаоса получил новое развитие. Большинство распределенных сред можно аппроксимировать совокупностью дискретных элементов, локально взаимодействующих друг с другом. Через каждый из таких элементов может проходить поток энергии, поступающий от внешнего источника. По-видимому, даже когда отдельные элементы системы обладают сложной структурой, вся их внутренняя сложность не проявляется во взаимодействиях между ними и, с точки зрения макросистемы, они функционируют как достаточно простые объекты с малым числом эффективных степеней свободы.

Используя обобщение теории сетей функционально взаимодействующих автоматов, в данной работе проводится параллель между явлением самоорганизации и подавлением хаоса. Показано, что только определенное сцепление первоначально хаотических автоматов может привести к появлению сложного каскада с необходимыми динамическими свойствами. Основным критерием такого образования является предписанная регулярная динамика образованного каскада взаимодействующих автоматов.

По-видимому, обобщение данной задачи позволит обнаружить ряд закономерностей в соотношении между порядком и хаосом в пространственно-временных системах. Более того, дальнейшее развитие этого направления может дать ключ к созданию достаточно сложных структур с заданными свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.В.Алексеев, А.Ю.Лоскутов. Управление системой со странным аттрактором посредством периодического параметрического воздействия. ДАН СССР, 1987, т.293, с.1346–1348.
2. E. Ott, C. Grebogi, J. A. Yorke. Controlling chaos. Phys. Rev. Lett., 1990, v.64, p.1196–1199.
3. L. Fronzoni, M. Geocondo, M. Pettini. Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations. Phys. Rev. A, 1991, v.43, p.6483–6487.
4. F. J. Romeiras, E. Ott, C. Grebogi, W. P. Dayawansa. Controlling chaotic dynamical systems. Physica D, 1992, v.58, p.165–192.
5. А.Ю.Лоскутов, А.И.Шшишмарев. Об одном свойстве семейства квадратичных отображений при параметрическом воздействии. Успехи матем. наук, 1993 т.48, с.169–170.
6. T. Shinbrot, C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke. Using small perturbations to control of chaos. Nature, 1993, v.363, p.411–417.
7. A. Loskutov, A. I. Shishmarev. Control of dynamical systems behavior by parametric perturbations: an analytic approach. Chaos, 1994, v.4, p.351–355.
8. А.Ю.Лоскутов. Проблемы нелинейной динамики. II. Подавление хаоса и управление динамическими системами. Вестн. Моск. ун-та, сер. Физ.-астр., 2001, № 3, с.3–21.

9. *А.Ю.Лоскутов*. Хаос и управление динамическими системами. — В сб. Нелинейная динамика и управление. Ред. С.В.Емельянов, С.К.Коровин. — М.: Физматлит, 2001, с.163–216.
10. *A.Loskutov and S.D.Rybalko*. Some properties of one- and two-dimensional perturbed maps. Proc. of the 5th Int. Conf. on Difference Equations and Applications, ICDEA'2002, Temuco, Chile, January 3–7, 2002. Taylor and Francis Publ., London, 2002, p.207–230.
11. *A.Lasota, M.C.Mackey*. Chaos, Fractals and Noise. Stochastic Aspects of Dynamics. Springer, Berlin: 1994.
12. *A.Katok, B.Hasselblatt*. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
13. *W.de Melo, S.van Strien*. One-Dimensional Dynamics. Springer, Berlin: 1993.
14. *A.Loskutov, V.M.Tereshko, K.A.Vasiliev*. Stabilization of chaotic dynamics of one-dimensional maps. Int. J. Bif. and Chaos, 1996, v.6, p.725–735.
15. *А.Н.Шарковский, Ю.Л.Майстренко, Е.Ю.Романенко*. Разностные уравнения и их приложения. — Киев: Наукова думка, 1986.
16. *Г.Шустер*. Детерминированный хаос. Введение. — М.: Мир, 1988.
17. *M.V.Jakobson*. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. Commun. Math. Phys., 1981, v.81, № 1, p.39–88.
18. *M.V.Hirsch*. Convergent activation dynamics in continuous time networks. Neural Networks, 1989, v.2, p.331–349.
19. *H.L.Smith*. Convergent and oscillatory activation dynamics for cascades of neural nets with nearest neighbor competitive or cooperative interactions. Neural Networks, 1991, v.4, p.41–46.
20. *A.Loskutov, V.M.Tereshko, K.A.Vasiliev*. Predicted dynamics for cyclic cascades of chaotic deterministic automata. Int. J. Neural Syst., 1995, v.6, p.216–224.

Поступила в редакцию 03.12.2003.