# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛОКАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПРОГНОЗА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

**А.Ю. Лоскутов, Д.И. Журавлев, О.Л. Котляров**

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет*

**Аннотация**

В работе обоснован подход к исследованию нерегулярных временных рядов, основанный на представлениях нелинейной динамики. При этом ряд представляется как набор некоторых векторов состояний с известными функциями перехода к следующему состоянию. Посредством применения метода локальной аппроксимации решается задача прогнозирования нерегулярных временных рядов, описываются критерии улучшения прогноза. Показаны основные отличия и преимущества этого метода перед традиционными «глобальными» методами построения прогноза. Сформулированы основные сложности применения метода локальной аппроксимации и приведены три варианта данного метода для решения задачи прогноза. Рассмотрены возможности применения метода локальной аппроксимации для прогнозирования экономических показателей на примере прогноза динамики индексов Доу-Джонса, S&P, NASDAQ в различных фазах экономических циклов. Определены основные условия и ограничения применения этого метода для прогноза фондовых индексов и других экономических показателей.

**Ключевые слова**

*прогнозирование, фондовый индекс, нелинейная динамика, временные ряды*

# APPLICATIONS OF A LOCAL APPROXIMATION TECHNIQUE FOR FORECASTING OF ECONOMIC INDICATORS

**A.Yu.Loskutov, D.I.Zhuravlev and O.L.Kotlyarov**

*Physics Faculty, Moscow State University after M.V.Lomonosov*

**Abstract**

A forecasting technique developed within the framework of nonlinear dynamics for irregular time series, – the local approximation method – is presented. The basic differences and advantage of this technique from the conventional “global” forecasting ways are described. Capabilities of the local approximation method on the example of Dow-Jones, S&P and NASDAQ indices in different cycles phases are considered. The main conditions and restrictions of this technique for stock indices and other economic indicators are determined.

**Key words**

*forecasting, stock index, nonlinear dynamics, time series*

## Содержание



## 1. Введение

Синергетика, появившаяся более четверти века назад, благодаря своему междисциплинарному характеру, получила достаточно широкое распространение как наука об общих закономерностях процессов хаотизации и самоорганизации [1, 2]. Как показали теоретические и экспериментальные исследования, эволюция различных нелинейных систем имеет много общего, что и дает возможность описывать их единым образом. Целый ряд идей и методов, некогда используемых только узким кругом исследователей, стали общезначимыми, выходя за рамки специализированных дисциплин. На сегодняшний день методы синергетики и нелинейной динамики успешно применяются во многих областях исследований, связанных с изучением динамики различных процессов [3-5]. Одним из примеров наиболее плодотворного применения методов нелинейной динамики стало их использование для анализа и прогноза временных рядов.

*Временной ряд* – это расположенная в хронологическом порядке последовательность значений некоторой величины. При работе с временными рядами основной интерес представляет получение с их помощью информации о породившей их системе и, если это возможно, прогнозирование дальнейшего изменения величины, значения которой составляют изучаемый временной ряд. Применяемые при этом методы во многом опираются на характеристики, разработанные математической статистикой. Последние базируются на достаточно жестких предположениях о характере исследуемых процессов (стационарности, типе распределения и т.д.). В то же время при исследовании экономических данных проверка выполнимости этих предположений в должной мере невозможна. Поэтому выводы, полученные на базе формально-статистического инструментария, должны восприниматься с осторожностью и дополняться содержательным анализом.

Конечной целью анализа временных рядов (как и статистического анализа вообще) является достижение более глубокого понимания тех причинных механизмов, которые лежат в основе динамики порождающих эти ряды нелинейных систем. В первую очередь это связано с тем, что в большинстве случаев в силу недостатка данных о природе явления не удается построить адекватную математическую модель. Как правило, в этом случае имеется лишь наблюдаемая. *Наблюдаемая* – это сигнал или определенная реализация, по которой можно судить о характере процесса в системе. Прослеживая за изменением наблюдаемой во времени, можно построить некоторую функцию *f(t)*. Она может быть непрерывной или дискретной, если измерения проводятся через определённые промежутки времени.

*Скалярным временным рядом* называется массив из $N$ чисел, представляющих собой значения некоторой динамической переменной $x(t)$, взятые с постоянным шагом $\Delta t$ по времени, т.е. в моменты $t_i = t_0 + (i-1)\Delta t:\ x_i = x(t_i)$, $i=1,...,N$ [3]. Подобные временные ряды являются основным результатом наблюдений за большинством систем, как природных, таких, например, как атмосфера, так и искусственных, таких как биржа.

Методы обработки и прогнозирования временных рядов развиваются достаточно давно. В качестве первых побудительных мотивов к разработке таких методов обычно указывают задачи метеорологии (например, построения прогноза температуры) и финансового анализа (прогноз цен акций, курсов валют). Также большое количество временных рядов дают астрономические наблюдения, физиология и медицина. Однако астрономические данные не слишком интересны, поскольку обычные астрономические явления можно предсказать заранее, а также узнать, когда происходили замечательные явления, такие как затмения или появления комет в прошлом. Если к этому добавить, что положения, скорости и массы тел солнечной системы известны достаточно точно (с физической точки зрения) в любой момент времени, то предсказуемость астрономических явлений становится более понятной. Метеорология, в отличие от астрономии, имеет дело с огромным числом элементов сильно связанных между собой: например, частицы влаги, собранные в облака или существующие в воздухе. В данном случае трудности возникают именно принципиальные: неизвестно, какой именно математический объект следует поставить в соответствие полученным данным. Поэтому в силу такой неопределенности в течение длительного времени применяемые для обработки временных рядов методы, как уже было сказано выше, во многом опирались на модели и характеристики, разработанные математической статистикой [6]. Как следствие были сформулированы две основные задачи анализа временных рядов: *задача идентификации* и *задача прогноза*.

## 2. Задачи прогноза и идентификации

Наиболее интригующим и заманчивым приложением теории нелинейных систем с хаотическим поведением является прогнозирование динамики порождаемых ими временных рядов. При некоторых условиях возможно с большой точностью произвести оценку будущего значения временного ряда, причем эта оценка представляет собой функцию только от предыдущих значений ряда. В этом и состоит одна из основных задач анализа временных рядов – *задача прогноза*: на основе одних лишь наблюдений за системой, предсказать ее поведение в будущем. Более того, при прогнозировании не делается различий между природой системы. Это может быть курс доллара, сейсмозапись или динамика солнечной активности. При этом изменение наблюдаемой определяется микропараметрами. В таком случае говорят о *техническом подходе.*

Задача прогноза, видимо, одна из старейших задач анализа временных рядов. Она возникла задолго до появления синергетики и нелинейной динамики, и называлась «предсказанием случайных процессов». При каких условиях могут быть динамически смоделированы некоторые временные ряды и успешно осуществлено их прогнозирование? Когда исследуемая система – детерминированная (или динамическая, т.е. описывается конечным набором обыкновенных дифференциальных уравнений), – то наблюдаемая всегда будет функцией от ее фазовой точки. Однако, как правило, заранее неизвестно, возможно ли описать данный процесс динамически. Тем не менее, в рамках современной теории размерности и теории динамических систем можно, в принципе, отличить шум (случайный процесс) от детерминированного поведения и тем самым установить конечномерность рассматриваемого явления [7].

Таким образом, становится возможным не только описывать поведение исследуемого временного ряда, но и прогнозировать его динамику. Следовательно, по единственной наблюдаемой, в принципе, удается определить некоторые особенности динамической системы и получить представление о ее свойствах [3]. Именно в этом состоит *задачи идентификации*, при решении которой предпринимается попытка ответить на вопрос: каковы параметры системы (они могут быть самыми различными, например статистические распределения, спектральные свойства), породившей данный временной ряд. Очень важно, что с помощью этих параметров можно идентифицировать (распознать) систему, то есть отличить ее от других [8]. Проблемы такого типа возникают, например, в задачах медицинской или технической диагностики: необходимо отличить различные патологии от нормы, не разрушая систему, а используя доступные измерению характеристики [9]. Таким образом, изменение наблюдаемой определяется макропараметрами системы. В этом случае говорят, что реализуется *фундаментальный подход*.

## 3. Нелинейная динамика и теория временных рядов

Исследования нелинейных динамических процессов в математике и физике показали, что хаотическое поведение в системах с небольшим числом степеней свободы весьма типично. Таким образом, проблема предсказуемости стала общей для многих направлений современной науки. В связи с этим в последнее время стало интенсивно развиваться новое направление в нелинейной динамике и синергетике, посвященное проблемам предсказуемости поведения хаотических систем, управления их динамикой и возможности подавления хаоса. На этом пути удается найти подходы к таким приложениям, как обработка информации, скрытая связь (то есть пересылка зашифрованных сообщений), стабилизация неупорядоченных сокращений сердечной мышцы и дефибрилляция, прогноз динамики финансовых рынков и др.[1]. Следовательно, отнюдь не случайные процессы, а маломодовые динамические системы с хаотическим поведением, вроде системы Лоренца оказались наиболее оптимальными для тестирования и приложения методов нелинейной динамики.

В 1980 году математик Ф.Такенс в своей знаменитой теореме, опубликованной годом позже [10], предложил строгое математическое обоснование всей концепции прогноза временных рядов с точки зрения нелинейной динамики. Именно эта теорема лежит в основе всех алгоритмов анализа временных рядов методами нелинейной динамики.

Идеи Такенса дали начало развитию новых методов анализа и прогнозирования временных рядов, использующих подходы нелинейной динамики и имеющих строгое математическое обоснование.

Первый шаг при анализе временных рядов, основанном на теореме Такенса, состоит в переходе от скалярного ряда к его многомерному представлению:

$$\bar{z}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i-1} \\ \vdots \\ x_{i-M+1} \end{pmatrix},$$

где $M$ – размерность вложения – параметр, определяемый отдельно для каждого ряда. После этого перехода задачу прогноза по временному ряду можно сформулировать следующим образом. Имеется $M$ - мерное представление временного ряда в виде векторов состояний $\mathbf{z}_i$. Для первых $N-M$ векторов известны значения функции, задающей переход к следующему состоянию: $\mathbf{z}_{i+1} = F(\mathbf{z}_i)$ (поскольку заданы следующие за $\mathbf{z}_i$ члены временного ряда). Требуется найти значение этой функции для последнего по времени вектора состояния $\mathbf{z}_t$, т.е. построить прогноз на один шаг вперёд: $\hat{\mathbf{z}}_{t+1} = F(\mathbf{z}_t)$. Априорные сведения о функции $F$ весьма малы. Таким образом, математически задача поставлена весьма плохо, поэтому и решается она на физическом или техническом уровне строгости. Тем не менее, численные эксперименты показывают, что для модельных задач можно получить неплохой прогноз.

Методы прогноза временных рядов делятся на два типа: *параметрические* и *непараметрические*. Параметрическими называют методы, в которых вид функции $F(\mathbf{z},\boldsymbol{a})$ определяется моделью процесса и остаётся одинаковым для всех $\mathbf{z}_i$. Вектор параметров $\boldsymbol{a}$ может оцениваться по временному ряду. Например, если предполагается, что изменение наблюдаемой происходит по синусоидальному закону, то по траектории временного ряда можно оценить амплитуду колебаний. Непараметрические методы используются в ситуациях, когда трудно подобрать адекватную модель изучаемого процесса. В этом случае единственным способом описания процесса является выражение следующих по времени значений ряда через предыдущие: $\mathbf{z}_{n+1} = F(\mathbf{z}_n, \ldots, \mathbf{z}_1)$. Часто при таком описании функцию $F(\mathbf{z}_n, \ldots, \mathbf{z}_1)$ полагают линейной [11].

В непараметрическом случае функцию $F$ (так же как и в параметрическом) можно считать неизменной для всего ряда. Такое предположение делается, например, в методах ARMA[1] [3]. Однако методы, основанные на глобальной аппроксимации, дают хорошее приближение лишь до тех пор, пока данных хватает на устойчивую оценку ее параметров. Если же функция довольно сложная, то нет никакой гарантии, что можно найти представление, которое позволит эффективно аппроксимировать исследуемую функцию на всей траектории ряда. Может получиться замкнутый круг: чем сложнее функция, тем надо больше параметров, чем больше параметров требуется оценить, тем больше надо данных. В свою очередь увеличение количества используемых данных (что не всегда доступно) при "сложном" поведении функции требует введения в модель дополнительных параметров и т.д.

Но можно попробовать избежать этого зацикливания и не гнаться за единым представлением всей функции, а воспользоваться локальной аппроксимацией. Впервые такой метод был описан в работе [12].

## 4. Метод локальной аппроксимации

Основная идея метода локальной аппроксимации (ЛА) состоит в том, чтобы разбить область определения функции на несколько локальных областей, построить аппроксимирующие модели и оценить параметры этих моделей отдельно в каждой области. Если функция гладкая, то области могут быть достаточно малыми так, чтобы функция в каждой из них не изменялась слишком резко. Это позволяет применять в каждой области достаточно простые модели, например, линейные. Главное условие эффективного применения локальной аппроксимации – удачный выбор размера локальной области, т. е. числа соседей. Это число надо выбрать так, чтобы в каждой области их было бы достаточно для устойчивой оценки параметров и прибавление небольшого числа новых соседей не давало бы существенного изменения оцениваемых параметров.

Проще всего представить суть метода ЛА на примере прогнозирования котировок на бирже. Для того чтобы сделать прогноз котировок на завтра в соответствии с методом ЛА, надо просмотреть данные о котировках за весь период наблюдений и найти день наиболее похожий на сегодняшний. Значение котировки в следующий за ним день и будет прогнозом на завтра. В определенном смысле этот метод напоминает «классический» технический анализ.

Использование локальной аппроксимации в окрестности точки в пространстве состояний, задаваемой вектором $\mathbf{x}$, включает в себя три основных шага:

- Выбор локального представления – модели описания эволюции соседей;
- Определение окрестности (числа соседей);
- Оценка параметров выбранной модели и построение прогноза в предположении, что $\mathbf{x}$ изменяется по тому же закону и с теми же параметрами, что и его соседи.

[1] AutoRegressive Moving Average (англ.) – авторегрессия и скользящее среднее.

Самый простой способ задания областей состоит в разбиении всей области определения функции на отдельные непересекающиеся подобласти. Например, с помощью прямоугольной сетки. Этот подход имеет два основных недостатка. Во-первых, при таком разграничении отсутствуют перекрытия между отдельными подобластями. Значит, нет непрерывного перехода от модели с параметрами, выбранными для одной области, к модели полученной для соседней области. Поэтому точки вблизи границ областей будут приближаться плохо. Второй недостаток – возможное неравномерное распределение точек по областям, при котором в некоторых из них может оказаться так мало соседей, что будет невозможно оценить все параметры. Увеличение размера областей в этом случае также может оказаться неэффективным из-за возможной потери преимуществ, которые даёт "локальность" аппроксимации.

Альтернативой разбиению всей области на непересекающиеся прямоугольные подобласти будет выбор соседей в соответствии с некоторым критерием. Самый простой из них – критерий близости. Определим $N^{(n)}$, т.е. ближайшую окрестность (область) $\mathbf{x}$ в пространстве задержек как совокупность точек $\{\mathbf{y}^t\}$ (соседей точки $\mathbf{x}$), которые находятся в некотором смысле близко к $\mathbf{x}$. Близость некоторой точки $\mathbf{y}^t$ к $\mathbf{x}$, хотя мы и рассматриваем динамику изменения наблюдаемой, не подразумевает близость во времени. Расстояние между точками определяется в соответствии с некоторой нормой в пространстве задержек. Тогда для данной метрики $\|\cdot\|$ при *заданном* числе соседей $N^{(n)}$ набор $\{\mathbf{y}^t\}$ будет набором ближайших соседей $\mathbf{x}$, если он обеспечивает минимум $\sum_{t=1}^{N^{(n)}} \|\mathbf{y}^t - \mathbf{x}\|$. Этот критерий не оптимален и имеет много недостатков. Например, уже в двумерном случае понятно, что если треугольник, определенный тремя самыми близкими соседями не заключает в себе $\mathbf{x}$, то прогноз может получиться слишком неточным. Другой недостаток связан с определением числа соседей: можно указать лишь его нижнюю оценку. Это число должно быть не меньше количества параметров модели, но сколько точно соседей брать – однозначного рецепта нет. При этом выбор "хороших" соседей – один из важнейших факторов влияющих на качество предсказаний.

Следующий шаг после выбора соседей – оценка параметров выбранной для аппроксимации модели. Выбор модели представляет собой отдельную задачу. Как правило, это делается эмпирически по результатам сравнения точности прогнозов на различных примерах. В отсутствие априорной информации о системе, породившей прогнозируемый временной ряд, используются полиномиальные аппроксимации $f^{t+T}(\mathbf{x}^t) = P_q(x_1^t, x_2^t, \ldots, x_M^t)$, где $T$ – время прогноза, $q$ – степень полинома. Поэтому схемы локальной аппроксимации можно классифицировать в соответствии с порядком аппроксимирующего полинома.

Выбрав порядок аппроксимации, можно определить минимально необходимое число соседей, которое равно числу свободных параметров. Приближение, полученное по такому количеству соседей крайне неустойчиво, добавление одного нового соседа радикально меняет результат, и получаемый на основе этого приближения прогноз редко оказывается удачным. Поэтому для повышения устойчивости прогноза количество соседей берут в несколько раз превышающим минимально необходимое их число.

Казалось бы, переход к более высоким порядкам аппроксимации должен сопровождаться повышением точности прогноза. Однако здесь мы сталкиваемся с той же проблемой, что и при использовании глобальной аппроксимации: повышение степени аппроксимирующего полинома требует резкого увеличения количества соседей, а большее число соседей влечет усложнение поведения функции. Таким образом, увеличение порядка должно приводить к повышению точности аппроксимации, но его следствие – рост числа соседей – к её снижению. Поиск компромисса между этими двумя эффектами – центральная проблема в методе ЛА.

Соответственно, если вернуться к примеру с котировками акций на бирже, то существует три основных способа улучшения прогноза методом ЛА. Во-первых, можно выбрать несколько «соседей», т.е. дней с такими же котировками как сегодня и усреднять их предсказания. Ещё большего улучшения можно достичь, если при выборе «соседей» руководствоваться не только сегодняшним значением, но и динамикой котировок за последние несколько дней, например, за неделю. В этом случае «соседней» будет уже неделя (не календарная, а последние семь дней), наиболее близкая по значениям котировок к текущей. Этот переход соответствует увеличению размерности вложения. Теперь мы сравниваем уже не отдельные (скалярные) значения, а векторы, и среди получающихся таким образом «соседей» меньше вероятность появления «ложных».

Третий способ улучшения прогноза состоит в коррекции прогноза в зависимости от того, насколько тот или иной сосед отличается от «сегодняшнего», стартового вектора (вектор из значений котировок сегодня, вчера, позавчера и т.д.). Это метод ЛА первого порядка (ЛА-1), который предполагает линейную зависимость корректирующей добавки от отклонений векторов соседей от стартового вектора. Если учитывать квадратичную зависимость от отклонений, то это будет ЛА-2 и так далее, однако при использовании высоких порядков аппроксимации для оценки необходимых параметров требуется очень большое количество соседей и, следовательно, очень длинные ряды, так что, как правило, ограничиваются порядком аппроксимации не выше второго.

Для прогноза на несколько шагов (дней, если продолжать пример, рассмотренный выше) существует три варианта ЛА: *итеративный,* когда параметры (коэффициент влияния отклонений «соседей», «средний» прогноз – среднее значение прогнозов от каждого соседа) рассчитываются лишь однажды и на последующих шагах не пересчитываются, а только что «спрогнозированный» вектор используется в качестве нового стартового вектора. Модификация этого варианта – *итеративный вариант с пересчётом.* В нём спрогнозированный вектор также как и в предыдущем случае становится стартовым, но все соседи выбираются заново, а затем пересчитываются все параметры. В третьем, *«прямом» варианте*, прогноз строится независимо для всех интересующих моментов времени, как будто это прогнозы на один шаг, без добавления спрогнозированных векторов к исходным данным. Преимущество этого варианта состоит в том, что не происходит накопления ошибки прогноза, т.к. ошибка в одном из шагов никак не влияет на прогноз значения в следующий момент времени.

С точки зрения анализа системы, отражением динамики которой для нас является исследуемый временной ряд, локальная аппроксимация менее информативна в сравнении с глобальной, так как оценка параметров последней может дать дополнительные сведения о самой системе и её динамике. Однако, если главный критерий выбора модели – точность, то во многих случаях более предпочтительной может оказаться локальная аппроксимация, преимущества которой особенно заметны для «сложных» непериодических функций, когда невозможно повышение точности глобальных моделей за счёт накопления и усреднения данных наблюдений.

## 5. Результаты численного анализа

При построении прогноза для реальных экономических рядов предпочтение было отдано итеративному варианту метода локальной аппроксимации первого порядка (итеративный ЛА-1). Выбор именно первого порядка аппроксимации для большинства представленных прогнозов – следствие уже упоминавшегося компромисса между точностью аппроксимации и близостью соседей между собой. Последние требование особенно важно при прогнозе экономических рядов, так как в них, как правило, сильно выражен тренд и как следствие редко удаётся найти необходимое для методов старших порядков число соседей стартового вектора. Итеративный вариант прогноза при предсказании на несколько шагов вперёд выбран в соответствии с рекомендацией из работы [12], в которой доказывается оптимальность этого варианта для прогноза недетерминированных временных рядов. Количество соседей так же в соответствии с [12] выбиралось втрое превышающим размерность вложения. Последняя, в свою очередь, подбиралась отдельно для каждого ряда в зависимости от общего числа точек и лежала в интервале 5–7.

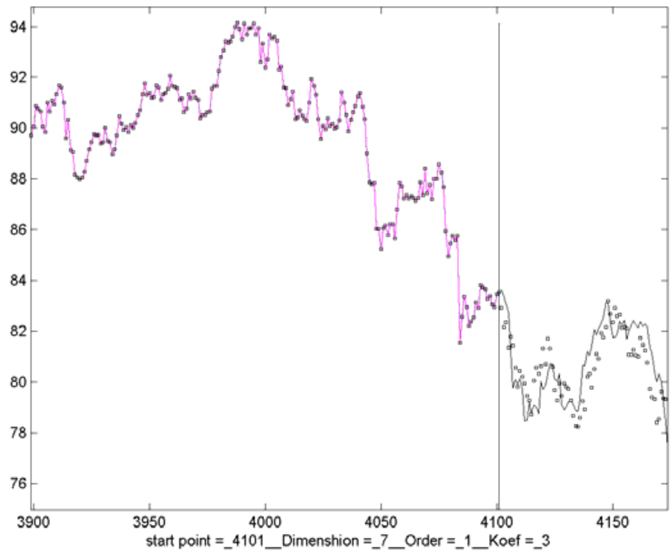


**Рис. 1**. Прогноз индекса Доу-Джонса.

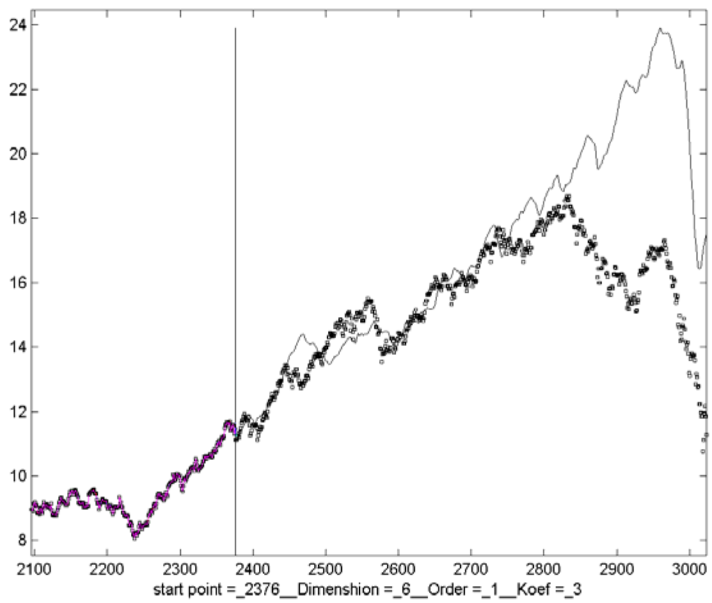


**Рис. 2.** Прогноз индекса S&P. «Великая депрессия».

Достоинства и недостатки данного метода продемонстрированы на рис. 1–4. Здесь представлены исследования на реальных экономических рядах[2]. Для оценки эффективности прогнозов имеющийся ряд разбивался на две части, по первой части строился прогноз значений ряда для второго, значительно более короткого отрезка. На рис. 1 представлена динамика индекса Доу-Джонса (фиолетовая линия), его прогноз на 70 дней (серая линия) и истинные значения (серые точки). Для построения прогноза использовался ряд из 4100 точек, отражающий динамику индекса с 1901 по 1915 годы (на рисунке показаны последние 280 значений ряда). Start Point – точка начала прогноза, Dimension – размерность вложения, Order – порядок ЛА, в данном случае ЛА-1. Как видно из рисунка, удается достаточно точно спрогнозировать тренд ряда (его спады и подъемы) в течение длительного отрезка времени (70 точек). Более того, в некоторых точках удалось достичь численного равенства значений истинного ряда и прогноза. Затем (после 70 точек) начинается расхождение и дальнейшее совпадение с динамикой исходного ряда больше похоже на случайное совпадение, чем на реальный прогноз (на графике не представлено). Прогноз индекса Доу-Джонса,

[2] Данные взяты из "StatLib – Datasets Archive": http://lib.stat.cmu.edu.

представленный на рис.1, это один из лучших результатов, которого удалось достичь с помощью метода ЛА. Этому есть свое объяснение – ряд достаточно длинный (более 4000 точек) и несильно зашумлен. Используемый для прогноза период был выбран не случайно, на этом интервале в динамике ряда можно было уловить намеки на квазипериодичность и, что не мало важно, отсутствовал быстрорастущий тренд.

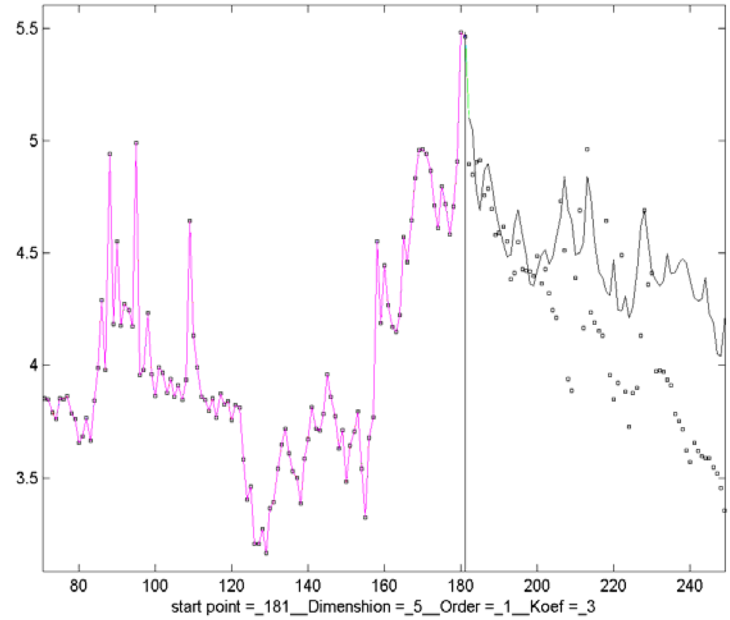


**Рис. 3.** Прогноз индекса Nasdaq.

При построении «прогноза» для индекса S&P во время «великой депрессии» (1929-1933 г.г.) в США (рис.2), было замечено, что лучше всего удается предсказывать дальнейшую динамику ряда, если точку начала прогноза брать в начале подъема (спада) временного ряда. Как видно, первые 40 точек прогноза практически полностью совпадают с истинными значениями ряда. Далее легко можно проследить тренд ряда, но в тоже время локальные спады удается отследить не всегда. И совсем уже плохо метод ЛА-1 ведет себя, когда спад затянулся (начиная с 2825 точки и до конца). Справедливости ради стоит отметить, что второй глобальный спад (начиная с 2960 точки) удалось отследить, хотя и только на уровне тренда ряда. Сменой порядка метода и подбором числа соседей решить данную проблему не удалось. Подобную картину можно было наблюдать и на большинстве других экономических рядов.

На следующем рисунке (рис. 3) представлены результаты исследования изменения индекса Nasdaq в течение 9 месяцев. Здесь показаны более свежие экономические данные (за 2000 год) и даже, несмотря на то, что ряд был коротким, с помощью метода ЛА-1 удалось достичь достаточно хороших результатов. Во-первых, получилось 23 точки более или менее удачного прогноза, до того момента, когда уже начинается сильно заметное расхождение. Во-вторых, даже после этого момента с помощью ЛА удалось отследить максимальные пики на графике.

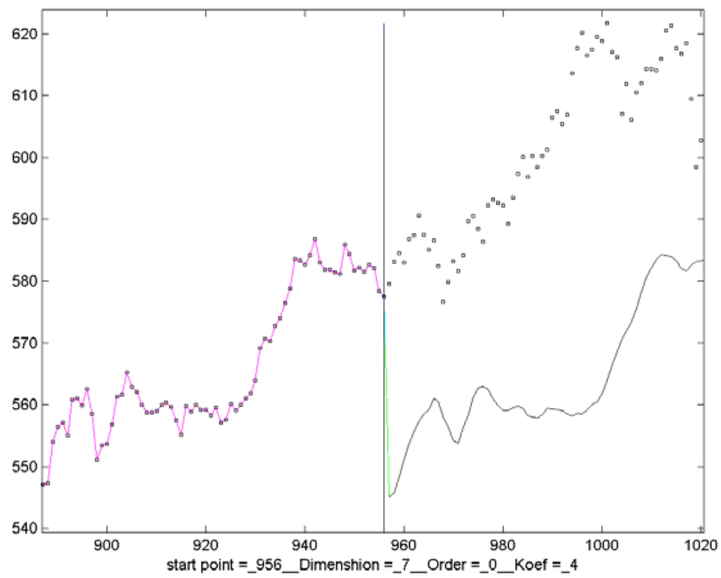


**Рис. 4.** Прогноз индекса S&P. Приближение к «великой депрессии».

Один из неприятных моментов, с которым пришлось столкнуться при исследовании свойств

ЛА на примере экономических рядов помимо того, что для некоторых рядов метод оказался просто недееспособен (например, практически для всех курсов акций российских предприятий), иллюстрируется на рис. 4. На этом рисунке представлены результаты прогноза динамики индекса S&P. Видно, что кривая прогноза по своему характеру напоминает тренд временного ряда, но оказывается смещенной вниз относительно начальной точки прогноза. Возможно, этот негативный момент связан с квазипериодичностью временного ряда, так как подобный эффект наблюдался еще у некоторых экономических рядов.

## 6. Заключение

На сегодняшний день большинство способов, которые используются для прогнозирования временных рядов в экономике, так или иначе связаны с построением авторегрессионных моделей. Методы выбора параметров этих моделей и их идентификации хорошо проработаны, а сами алгоритмы этих методов входят в большинство статистических и эконометрических программных пакетов.

Рассматриваемый в настоящей работе метод ЛА имеет много общего с авторегрессионными методами. В то же время алгоритм ЛА обладает одним явным преимуществом перед обычной авторегрессией. Оно заключается в использовании вместо глобально-линейной (единой для всего ряда) кусочно-линейной аппроксимации. Это позволяет с помощью ЛА успешно прогнозировать нерегулярные (квазипериодические, хаотические) временные ряды, для которых линейное авторегрессионое представление не приемлемо.

Основная причина, которая пока ограничивает использование метода ЛА, состоит в том, что его эффективное применение возможно только для рядов тех показателей, которые фиксировались достаточно продолжительное время. Этому требованию удовлетворяют лишь немногие ряды финансовых и макроэкономических показателей, например, индекс Доу-Джонса, по которому имеются данные больше чем за 100 последних лет. При анализе столь длинных рядов, конечно, трудно ожидать неизменности системы в течение всего времени наблюдений, но для ЛА в отличие от авторегрессии этого и не требуется.

Представленные в работе примеры применения ЛА для прогнозирования биржевых индексов, показывают, что во многих случаях их дальнейшее поведение действительно неплохо предсказывается с помощью ЛА. А это дает основания считать, что метод ЛА во многих случаях может рассматриваться как достойная альтернатива авторегрессионным моделям.

## Список литературы

1. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. *Введение в синергетику.*– М.: Наука, 1990.
2. Хакен Г. *Синергетика.*– М.: Мир, 1980.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г. *Анализ временных рядов. Прогноз и управление*.– М.: Мир, 1974.
4. А.С. Монин, Л.И. Питербарг Предсказуемость погоды и климата. В кн. *Пределы предсказуемости.* Ред. Ю.А. Кравцов.– ЦентрКом, Москва, 1997.
5. Дмитриев А.С., Кислов В.Я. *Стохастические колебания в радиофизике и электронике*.– М., Наука, 1989.
6. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. *Современные проблемы нелинейной динамики*.– М., УРСС, 2000.

7. A.Loskutov. Chaos and control in dynamical Systems.– *Computational Mathematics and Modeling*, 2001, v.12, No4, p.314–352.

8. Abarbanel H.D.I., Brown R., Sidorowich J.J., Tsimring L.S. The analysis of observed chaotic data in physical systems.– *Rev. Mod. Phys.*, **65** (1993), 1331-1391.

9. Ефремолва Т.М., Куликов М.А., Резвова И.Р. Участие нелинейных динамических процессов в формировании высокочастотной ЭЭГ кролика.– *Журнал высшей нервной деятельности*, 1991, т. 41, стр. 998-1006.

10. Takens F. Detecting strange attractors in turbulence.– *Lect. Notes in Math.*, Berlin: Springer, 1981, v.898, 336-381.

11. Льюнг Л. *Идентификация систем. Теория для пользователя.*– Москва, Физматлит, 1991.

12. J. D. Farmer and J. J. Sidorowich. Predicting Chaotic Time Series.– *Phys. Rev. Lett.*, **59** (1987), 845-848.