Эконофизика. Современная физика в поисках экономической теории. Ред. В.В.Харитонов, А.А.Ежов.— МИФИ, Москва, 2007, с.307–315.

Гомодинамичность финансовых временных рядов

А.А.Бредихин, А.Ю.Лоскутов

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, физический факультет

Аннотация

Предлагается один из возможных подходов к математическому описанию некоторых финансовых временных рядов, обладающих т.н. свойством гомодинамичности. В общем случае моделирование финансовых рядов требует достаточно большого объема данных, что на практике реализуется крайне редко. Для решения этой проблемы рассмотрен общий характер поведения траекторий вблизи стационарных точек, что позволяет построить математическую модель с точностью до конечного числа параметров. Описана эффективная техника оценки этих параметров.

УДК 517.9

1 Введение

В последнее время все большее внимание уделяется исследованию финансовых временны́х рядов с точки зрения теории динамических систем. Финансовый временной ряд — это последовательность, описывающая поведение определенного рыночного процесса, например, курс ценных бумаг или соотношение валют. Развитие теории в этом направлении дает возможность выявить существо глубинных экономических процессов, зачастую скрытых и неявных. Когда исследуемая система — динамическая (т.е. описывается конечным набором дифференциальных уравнений), то временной ряд всегда будет функцией от ее фазовой точки. Однако, как правило, заранее неизвестно, возможно ли описать данный процесс динамически. В рамках современной теории размерности и теории динамических систем можно, в принципе, отличить шум (случайный процесс) от детерминированного поведения и тем самым установить конечномерность рассматриваемого явления.

Допустим, что в результате наблюдений (например, торгов) была получена последовательность $\{y_m\}$. Ряд $\hat{y} = \{y_m\}_{m=0}^{\infty}$ называется *детерминированно порожденным*, если выполнены следующие условия [1–3]: *а*) существует динамическая система $\{T\}$ с конечномерным фазовым пространством $M = \{x\}$, точка x_0 и липшиц-непрерывная функция ϕ такие, что $\phi(T^m(x_0)) = y_m$ для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$; *б*) $\mathrm{dist}(T^t x, T^t x') \leq \mathrm{const} \cdot e^{\lambda t} \mathrm{dist}(x, x')$, т.е. траектории динамической системы $\{T\}$ не могут разбегаться быстрее, чем с экспоненциальной скоростью. Пространство всех временных рядов, определенное как множество всевозможных последовательностей $\hat{y}$, — это банахово пространство, задавая отображение сдвига в котором, получим универсальную динамическую систему, порождающую любой ограниченный ряд. Теперь, вводя предельное множество, можно определить емкость. Если емкость — величина конечная и траектории универсальной динамической системы не могут разбегаться со скоростью, большей, чем экспоненциальная (что означает конечность максимального показателя Ляпунова для процесса $\hat{y}$), то исследуемый ряд является детерминированно порожденным и описывается конечномерной системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Если тем или иным образом восстановить явный вид этих уравнений (хотя бы с точностью до некоторых параметров), то тем самым становится возможным описывать поведение исследуемого временного ряда. Таким образом, исследуя тот или иной временной ряд, в принципе возможно восстановить многие свойства исходной динамической системы и получить представление о ее аттракторе.

В ряде работ (см., например, [4–6] и цитируемую там литературу) был проведен анализ некоторых финансовых временных рядов и показано, что многие из них имеют конечную емкость. Таким образом, эти ряды могут быть описаны обыкновенным дифференциальным уравнением. В общем случае такое уравнение представляется в виде

$$\frac{d^n p}{dt^n} = F\left(\frac{d^{n-1}p}{dt^{n-1}}, \frac{d^{n-2}p}{dt^{n-2}}, \ldots, p, a_i\right) , \tag{1}$$

где F — некоторая функция, t — время и a_i — совокупность параметров. Для описания динамики временного ряда необходимо восстановить правую часть в уравнении (1). В некоторых работах (см., например, [7–9] и приведенные там ссылки) проводились оценки длины временного ряда, необходимой для построения функции F. Эти оценки показывают, что в большинстве случаев имеющихся данных *недостаточно* для определения правой части уравнения (1).

Для решения этой проблемы можно предложить подход, который сводится к следующему. Исследования многих финансовых рядов позволяют подметить две характерные особенности:

— зачастую курс акций колеблется в ограниченном интервале между так называемыми уровнями поддержки и сопротивления. Такое поведение называется *гомодинамическим*, т. е. соответствующим практически неизменному закону движения;

— время от времени курс акций "пробивает" эти уровни и после переходного процесса выходит на другой гомодинамический участок.

Интерпретация этих особенностей с точки зрения теории динамических систем составляет суть данной работы.

2 Линейные гомодинамические модели

Обыкновенное дифференциальное уравнение (1) может быть представлено в виде системы из n дифференциальных уравнений первого порядка. Фазовым пространством такой системы является n-мерное евклидово пространство. Каждому мгновенному состоянию системы отвечает фазовая точка этого пространства, и каждой точке пространства соответствует определенное и единственное состояние системы.

Динамику системы (1) можно представить как последовательное изменение положения фазовых точек, т.е. траектории движения этих точек в фазовом пространстве. Таким образом, поведению исходной системы (т.е. рыночного процесса) будет отвечать решение n обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующая фазовая траектория.

Вследствие существования уровней поддержки и сопротивления, в определенные интервалы времени финансовые временные ряды имеют достаточно большие участки, соответствующие мало изменяющемуся закону движения. Такие участки называются *гомодинамическими.* Как правило, гомодинамика (при некоторых дополнительных допущениях, см. ниже) может наблюдаться в периоды спокойного экономического состояния. Рассмотрим довольно эффективный подход к описанию гомодинамических участков финансовых временных рядов.

2.1 Исходные гипотезы

Для построения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих динамику гомодинамического финансового временного ряда, примем следующие исходные гипотезы.

1) Гомодинамические участки соответствуют движению системы в малой области фазового пространства.

2) Достаточно длительное движение системы в малой области фазового пространства возможно по следующим причинам:

- траектория находится в области притяжения неподвижной точки. Такое движение называют гомодинамическим движением *первого* типа.
- траектория находится в области неподвижной точки, притягивающей по одним направлениям и отталкивающей по другим. Такое движение обычно называют гомодинамическим движением *второго* типа.

3) Систему дифференциальных уравнений вблизи неподвижных точек можно линеаризовать. В этом случае, переходя обратно от системы к дифференциальному уравнению n-го порядка, получим линейное уравнение. Следовательно, гомодинамическое движение может быть описано *линейным* дифференциальным уравнением.

4) Прекращение гомодинамического движения может происходить

- в результате внешнего шока, т.е. воздействия факторов, неучтенных в системе; очевидно, такая ситуация допустима для гомодинамического движения как первого так и второго типов;
- в результате выхода из области, в которой справедлива линеаризованная система (см. пункт 3)); этот случай может иметь место лишь для гомодинамического движения второго типа.

Таким образом, мы допускаем, что бóльшую часть времени траектория системы проводит вблизи неподвижных точек. Кроме того, по тем или иным причинам траектория может переходить из окрестности одной неподвижной точки к другой.

2.2 Формулировка модели

Следуя принятым исходным гипотезам, представим изменение цены финансового актива на некотором гомодинамическом участке в следующим образом:

$$P(t) = p(t) + \varepsilon(t) \ ,$$
$$\frac{d^n p(t)}{dt^n} + \sum_{m=0}^{n-1} a_m \frac{d^m p(t)}{dt^m} = 0 \ , \tag{2}$$

где $P(t)$ — наблюдаемое значение цены в момент времени t, $\varepsilon(t)$ — белый шум с нулевым средним и дисперсией ν, $p(t)$ — математическое ожидание исследуемой величины в момент времени t, a_m — постоянные коэффициенты. Присутствие в наблюдаемых ценах случайной составляющей в реальности неизбежно.

Решение дифференциального уравнения (2) можно записать в виде:

$$p(t) = \sum_{m=1}^{n} z_m e^{w_m t} \ .$$

Таким образом, для прогнозирования соответствующего временного ряда необходимо уметь оценивать неизвестные параметры z_j и w_j.

2.3 Техника оценки параметров

Поскольку случайный аддитивный член $\varepsilon(t)$ является белым шумом, оценку параметров можно производить методом наименьших квадратов. Следуя этому методу необходимо произвести минимизацию по неизвестным параметрам функции следующего вида:

$$\sum_{s=1}^{T} \left(P(t_s) - \sum_{m=1}^{n} z_m e^{w_m t_s} \right)^2 \longrightarrow \min \ . \tag{3}$$

Минимизация функции (3) затрудняется тем, что параметры z_j и w_j являются, вообще говоря, комплексными числами. Кроме того, они не являются независимыми величинами, т.е. если $\mathrm{Im}\ w_j \neq 0$, то существует $k \neq j$ такое, что $z_j = z_k^*$, $w_j = w_k^*$. Здесь и далее знак * обозначает комплексное сопряжение. В связи с этим минимизация функции (3) должна проводиться поэтапно.

На первом этапе предположим, что комплексные параметры отсутствуют. Тогда необходимо найти минимальное значение функции (3) и набор параметров z_j, w_j, соответствующий этому значению. На втором этапе допустим, что существует пара сопряженных друг другу комплексных параметров w_1 и w_2, и им соответствует пара сопряженных друг другу комплексных параметров z_1 и z_2. Остальные параметры действительные. В этом случае функция (3) запишется как

$$\sum_{s=1}^{T} \left(P(t_s) - 2R_1 e^{\nu_1 t_s} \cos(u_1 t_s + \varphi_1) - \sum_{m=3}^{n} z_m e^{w_m t_s} \right)^2 \longrightarrow \min \ . \tag{4}$$

Здесь $z_1 = R_1 \exp(i\varphi_1)$, $z_2 = R_1 \exp(-i\varphi_1)$, $w_1 = \nu_1 + iu_1$, $w_2 = \nu_1 - iu_1$. Минимизируем функцию (4) по действительным параметрам R_1, φ_1, ν_1, u_1, $z_3, \ldots, z_n$, $w_3, \ldots, w_n$. На k-м этапе ($k \leq [n/2]+1$, где операция $[\cdot]$ означает взятие целой части) рассмотрим $k-1$ пар сопряженных друг другу комплексных параметров, w_1 и $w_2, \ldots, w_{2k-3}$ и w_{2k-2}. Им соответствуют $k-1$ пар сопряженных друг другу комплексных параметров z_1 и $z_2, \ldots,$ z_{2k-3} и z_{2k-2}. Остальные параметры будут действительными. Тогда функция (3) примет вид:

$$\sum_{s=1}^{T} \left(P(t_s) - 2 \sum_{l=1}^{k-1} R_l e^{\nu_l t_s} \cos(u_l t_s + \varphi_l) - \sum_{m=2k-1}^{n} z_m e^{w_m t_s} \right)^2 \longrightarrow \min . \tag{5}$$

Здесь $z_l = R_l \exp(i\varphi_l)$, $z_{l+1} = R_l \exp(-i\varphi_l)$, $w_l = \nu_l + iu_l$, $w_{l+1} = \nu_l - iu_l$. Теперь необходимо минимизировать функцию (5) по действительным параметрам $R_1, \ldots, R_{k-1}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-1}$, $\nu_1, \ldots, \nu_{k-1}$, $u_1, \ldots, u_{k-1}$, $z_{2k-1}, \ldots, z_n$, $w_{2k-1}, \ldots, w_n$.

Таким образом, после $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ этапов будем иметь $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ значений функции (3). Выбирая минимальное из этих значений, тем самым найдем оптимальные величины параметров z_j и w_j.

3 Заключительные замечания

Цель настоящей работы состояла в демонстрации принципиальной возможности провести реконструкцию правой части дифференциального уравнения (1) на основе общих соображений и без использования длинных рядов наблюдений. Хотя это и удается сделать, но на основе достаточно жестких предпосылок. Поэтому авторы не претендуют на то, что им удалось предложить рабочий инструмент моделирования. Тем не менее, вполне возможно, что развитие предложенного подхода позволит перейти к практическому использованию теории динамических систем на финансовых рынках. Для этого необходимо предложить алгоритм для выделения гомодинамических участков траектории.

В то же время, предложенный подход дает основание считать, что в некоторых случаях моделирование и прогнозирование на основе анализа ограниченных временных рядов может быть достаточно просто реализовано, поскольку гипотеза о гомодинамичности траекторий имеет под собой реальную почву для большого числа наблюдаемых.

В данной работе представлен только один из возможных подходов. Естественно, решение проблемы описания финансовых рядов этим не исчерпывается. Например, среди зарубежных исследователей весьма популярным подходом для анализа финансовых временных рядов является идея использования концепции так называемой авторегрессионной условной гетероскедастичности (см. об этом подробнее [10]). Она состоит в том, что изменение дисперсии определяется не внешними факторами, а внутренними параметрами и предысторией системы, в частности, реализованными в предыдущие моменты времени значениями временного ряда. Проверка этой концепции показала ее богатые возможности при объяснении статистических особенностей временных рядов, возникающих на валютных и иных финансовых рынках, в том числе и российских [10].

Другой подход связан с использованием данных о процессе формирования цен финансовых активов. Эти данные, в основном, сконцентрированы в самостоятельном разделе экономической теории, называемом теорией финансов. Использование моделей этой теории может оказаться полезным при определении вида функции F (см. (1)) с точностью до конечного числа параметров. В свою очередь, определение параметров может быть произведено на основании оптимального приближения решения уравнения (1) к имеющимся данным [10]. При этом длина известных временных рядов, необходимая для определения параметров, может быть на порядки меньше, чем для решения исходной непараметрической задачи.

Список литературы

[1] F.Takens. Detecting strange attractors in turbulence.— In: *Lect. Notes in Math.*, v.898. Springer, Berlin, 1980, p.336-382.

[2] F.Takens. Distinguishing deterministic and random systems.— In: *Nonlinear Dynamics and Turbulence.* Ed. G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph.— New York, Pitman, 1983, p.314-333.

[3] В.С.Афраймович, А.М.Рейман. Размерность и энтропия в многомерных системах.— В сб. *Нелинейные волны. Динамика и эволюция.* Ред. А.В.Гапонов-Грехов, И.М.Рабинович.— М., Наука, 1989, с.238-262.

[4] E.Peters. *Chaos and Order in the Capital Market.*— John Wiley and Sons, New York, 1991.

[5] E.Peters. A chaotic attractor for the S&P500.— *Financial Anal. J.*, 1991, No2.

[6] E Peters. *Financial Market Analysis.*— John Wiley and Sons, New York, 1994.

[7] Г.Г.Малинецкий, А.Б.Потапов. Нелинейность. Новые проблемы, новые возможности. В сб. “*Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур.*”— М., Наука, 1996, с.165-190.

[8] M. Casdagli. Nonlinear prediction of chaotic time series.— *Physica D*, 1989, v.35, No3, p.335-356.

[9] M. Casdagli, S.Eubank, J.D.Farmer, J.Gibson. State space reconstruction in the presence of noise.— *Physica D*, 1991, v.51, No1-3, p.52-98.

[10] А.Ю.Лоскутов, А.А.Бредихин. К проблеме описания финансовых временных рядов. III. ARCH–модели на финансовом рынке России.— *Обозрение прикл. и промышл. математики*, 2004, т.11, вып.3, с.468–486.

Homodynamicity of financial time series.

A.A.Bredikhin, A.Loskutov and A.B.Sedykh
Physics Faculty, Moscow State University

Abstract

An approach to the mathematical description of financial time series which possess the property of homodynamicity, is proposed. In general, the modeling of financial series requires a large enough data, that is realized only in highly rare cases. To resolve this problem, a general type of the behavior of trajectories near equilibrium points is considered. On the basis of such an approach a mathematical model determined up to the finite number of parameters is constructed. The efficient technique of the parameter estimation is presented.