ЭКОНОМИКА И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ, 2010, том 46, № 3, с. 58–70

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

НЕЛИНЕЙНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ РЫНКА

© 2010 г. А.Ю. Лоскутов[1]

(Москва)

В рамках теории динамических систем рассмотрена проблема стабилизации хаотического поведения рынка товаров, образованного конкурирующими фирмами. Анализ выполнен на основе исследования достаточно простой экономической модели двух фирм, выступающих на одном рынке, которые проводят активную и асимметричную стратегию инвестирования. В пространстве параметров данной модели найдены области, отвечающие ее хаотическому поведению. Показано, что посредством малых изменений параметров, отвечающих за эффективность инвестиций, становится возможным подавить хаос и вывести динамику обеих фирм на периодический режим функционирования. В результате ситуация на рынке стабилизируется и обе фирмы в среднем начинают получать бóльшую прибыль. При этом для получения данного результата достаточно, чтобы описанную политику осуществляла только одна фирма. Приведены обобщения полученных выводов на случай большого количества участников рынка. Представлены элементы математической теории стабилизации хаотического поведения динамических систем.

Ключевые слова: хаотическая динамика, рынок товаров, подавление хаоса, модель конкуренции.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, правильное планирование развития производства является решающим фактором конкурентоспособности. Поэтому одна из центральных проблем, с которой сталкиваются все предприятия в современных условиях, – это получение прогноза (краткосрочного и долгосрочного) развития ситуации на рынке. От того, как будет распределяться прибыль, полученная предприятием (выплачиваться в виде дивидендов или инвестироваться в производство и в какой пропорции), напрямую зависит его будущее. Очевидно, что если полученная прибыль будет полностью “потрачена”, то производство быстро придет в упадок, если же вся прибыль инвестируется в производство, такое предприятие не приносит доход. Кроме того, осуществляя планирование, необходимо принимать во внимание поведение конкурентов и корректировать стратегию развития в соответствии с условиями, которые складываются на рынке, где функционирует данное предприятие.

В результате возникает достаточно сложная задача, отправными моментами которой служат два вопроса. Во-первых, каким образом должна распределяться прибыль, полученная предприятиями, для нормального развития производства. Во-вторых, как решение о распределении ресурсов на одной фирме влияет на общее состояние в отдельной, пусть и достаточно малой отрасли.

При решении этой задачи возникает ряд трудностей. Зачастую на рынке складывается нестабильная ситуация и предсказать, что будет происходить с продажами товара в ближайшем будущем, чрезвычайно сложно. Более того, продажи в каждый последующий период часто меняются *хаотическим* образом и строить достоверные прогнозы в подобной ситуации практически невоз-

[1] Автор благодарен Н.А. Матюшенковой за критическое прочтение статьи и ценные замечания, способствовавшие улучшению материала, М.И. Давидич за предоставление некоторых оригинальных работ, а также Н.М. Сунцовой и В.М. Кузнецову за проведение ряда численных расчетов.

можно (Пу, 2002; Zhang, 1997). Поэтому для успешного и стабильного функционирования предприятия в подобных условиях необходимо найти определенный способ выхода на устойчивый режим. Желательно также, чтобы переход к регулярной динамике достигался с минимальными затратами.

В настоящей работе для решения данной задачи при условии неустойчивой (в том числе хаотической) ситуации на рынке предлагается использовать теорию управления нелинейными динамическими системами и стабилизации хаотического поведения (см. (Loskutov, 2001, p. 314; Лоскутов, Михайлов, 2007) и цитируемую там литературу). На примере простой модели двух конкурирующих фирм будет показано, что с помощью слабых направленных изменений параметров, отвечающих за размер инвестиций, можно подавить хаос и вывести рынок на периодический режим. В результате динамика рынка становится полностью предсказуемой, что позволяет строить успешную плановую политику и оптимально развивать производство. Для реализации такой ситуации достаточно, чтобы данную политику проводила *хотя бы одна фирма*. Однако при этом в среднем прибыль *обеих фирм* (в общем случае *всех участников*) возрастает.

Проблема управления динамическими системами и стабилизации хаотического поведения является частью более общей задачи *теории управляемых процессов* (см. (Неймарк, 1978) и приведенные там ссылки). Она может быть решена двумя качественно различными способами (Лоскутов, Михайлов, 2007). Первый способ обеспечивает выведение системы из хаотического режима на регулярный посредством внешних возмущений, реализованных без обратной связи (Алексеев, Лоскутов, 1987, с. 1346). Другими словами, этот метод не учитывает текущее состояние динамических переменных системы. Второй метод реализуется посредством корректирующего воздействия в соответствии с требуемым значением динамических переменных, что приводит к использованию обратной связи как необходимой компоненты воздействия (Ott, Grebogi, Yorke, 1990, p. 1146). По установившейся терминологии первый способ стабилизации хаотической динамики называется *подавлением хаоса*, или контролированием (иногда управлением или регулированием) хаотической динамики без обратной связи, а второй – *контролированием хаоса* (или управлением) с обратной связью (controlling chaos). В свою очередь реализация этих методов может быть проведена параметрическим методом (т.е. при помощи вариаций параметров) или силовым путем (т.е. аддитивным введением внешней силы в систему).

Введение обратной связи является определенным преимуществом, поскольку в большинстве случаев такой способ управления приводит к требуемому результату: выбранная заранее периодическая динамика стабилизируется и, таким образом, исследуемая система выводится на предписанный режим движения. Однако этот метод эффективен, если только система находится *вблизи* (в смысле отклонений значений динамических переменных от требуемых) нужного динамического режима. В противном случае необходимы дополнительные способы воздействия (Shinbrot, Ott, Grebogi, Yorke, 1990, p. 3215; Shinbrot, Grebogi, Ott, Yorke, 1992, p. 349; Shinbrot, Ott, Grebogi, Yorke, 1992, p. 4165; Kostelich et al., 1993, p. 305). В то же время методы без обратной связи не требуют введения постоянного слежения за состоянием системы, не столь подвержены воздействиям шумов и нуждаются в меньших ресурсах, что существенно упрощает их использование в приложениях (Meucci, Gadomski, Ciofini, Arecchi, 1994, p. 2528). Обзор по данным и смежным вопросам можно найти в (Loskutov, 2006, p. 1157).

Необходимо отметить, что исследования в этом направлении в приложении к экономике уже проводились (см., например, (Holyst, Urbanowicz, 2000, p. 587; Kopel, 1997, p. 269; Ahmed, Hassan, 2000, p. 189; Holyst, Zebrowska, Urbanowicz, 2001, p. 531; Feichtinger, 1992, p. 141). В частности, предлагалось уменьшать стоимость выпускаемого товара (Ahmed, Hassan, 2000, p. 189) либо осуществлять управление путем добавления новых аддитивных слагаемых, отвечающих дополнительным инвестициям (Holyst, Urbanowicz, 2000, p. 587; Kopel, 1997, p. 269; Holyst, Zebrowska, Urbanowicz, 2001, p. 531). Кроме того, иногда контроль подбирался в зависимости от произошедших изменений между прошлыми и текущими значениями переменных, т.е. при эффективном использовании обратной связи (Kopel, 1997; Ahmed, Hassan, 2000; Holyst, Hagel, Haag, Weidlich, 1996, p. 31).

Так, в работах (Kopel, 1997; Holyst, Hagel, Haag, Weidlich, 1996) исследуется возможность управления хаотическим поведением экономических систем и их вывода на периодический режим посредством контроля с обратной связью. Авторы нашли, что данный метод позволяет полностью (т.е. для каждого участника) стабилизировать хаотические отношения, переведя их на регулярный режим. При этом средний уровень продаж для каждой фирмы также возрастает. Следует заметить, что далеко не всегда удается отыскать дополнительные ресурсы (представляемые в модели аддитивными слагаемыми), которые могут помочь предприятию выйти на требуемый режим функционирования и занять выгодную позицию на рынке. Кроме того, ввиду инертности рынка очень трудно эффективно реализовать обратную связь. Поэтому наиболее востребованное решение – это найти возможность стабилизации динамики и подавления хаоса в системе без вовлечения обратной связи и с помощью ресурсов, которыми располагает предприятие.

В работах (Алексеев, Лоскутов, 1987, с. 1346; Лоскутов, Шишмарев, 1993, с. 169; Loskutov, Shishmarev, 1994, p. 351; Loskutov, 1993, p. 4581; 1995, p. 126; 2001, p. 314) был предложен и обоснован метод периодического параметрического управления системами (в том числе хаотическими), т.е. управления посредством только внутренних ресурсов. Для экономических приложений это означает, например, периодические изменения размеров инвестиций. Такие изменения могут быть достаточно малыми, т.е. инвестиции оказываются вполне доступными для фирм и не требуют дополнительных затрат. Реализация такого метода приводит как к стабилизации рынка и вырождению хаоса в периодический режим, так и к увеличению прибыли каждой фирмы.

2. СТАБИЛИЗАЦИЯ ХАОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ И ВОЗМОЖНОСТЬ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИКОЙ. ОБЩИЙ ПОДХОД

Рассмотрим предлагаемый параметрический метод воздействия более формально. Для изучения общих свойств параметрически возмущаемых систем исследуем сначала отображение общего вида $T_a\colon M \to M$:

$$T_a\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a), \tag{1}$$

где $a \in A$, $\mathbf{f} = \{f_1, \ldots, f_n\}, f_1, \ldots, f_n \in C^m$, $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$. При этом траектория точки $\mathbf{x}$ из M по отношению к $\mathbf{f}$ определится как подмножество

$$\{T_a^k = \underbrace{\mathbf{f} \circ \mathbf{f} \circ \ldots \circ \mathbf{f}}_{k \text{ раз}} \,|\, k \in \mathbf{Z}\}.$$

Зададим возмущение G, действующее на множестве параметров A, $G\colon A \to A$, как

$$G : a \mapsto g(a),\ \ a \in A. \tag{2}$$

Тогда результирующее возмущенное отображение можно записать в виде

$$\mathbf{T}_a : \begin{cases} \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a), \\ a \mapsto g(a), \quad \mathbf{x} \in M,\ a \in A. \end{cases} \tag{3}$$

Далее ограничимся только *периодическими* возмущениями: $a_{i+1} = g(a_i)$, $i = 1, \ldots, \tau - 1$, $a_1 = g(a_\tau)$, $a_i \neq a_j$ для $i \neq j$ ($a_i \in A$, $i = 1, \ldots, \tau$). Тогда каждому периодическому возмущению периода τ можно поставить в соответствие вектор $\hat{a} = (a_1, \ldots, a_\tau)$ из пространства $\mathbf{R}^\tau$. Таким образом, получим множество

$$\mathbf{A} = \{\hat{a} \in \underbrace{A \otimes A \otimes \ldots \otimes A}_{\tau \text{ раз}} : \hat{a} = (a_1, \ldots, a_\tau),\ \ a_i \neq a_j, 1 \le i,\ j \le \tau,\ \ i \neq j,\ a_1, \ldots, a_\tau \in A\},\ \mathbf{A} \subset \mathbf{R}^\tau,$$

отвечающее всевозможным периодическим возмущениям периода τ, оперирующих в A.

Анализируя отображение (3), можно обнаружить ряд интересных свойств (Loskutov, 2001, p. 314). Прежде всего, период t любого цикла периодически возмущаемого отображения (1) определяется из соотношения $t = \tau k$, где τ – период возмущения, k – положительное целое число. Действительно, если возмущенное отображение имеет t-периодический цикл, то последовательность координат точек, которые его формируют, также является периодической с периодом t. Но последовательность параметров a по определению периодична с периодом τ. Поэтому всегда $t = \tau k$, где k – целое число.

Замечание. Если спроектировать полученный t-периодический цикл на пространство M, то можно получить объект, который не может быть назван циклом в обычном понимании. Причина этого состоит в том, что точки цикла, которые отличаются друг от друга только в значении координаты a, проектируются в одну и ту же точку пространства M. Описанная ситуация, однако, не является случаем общего положения и, как правило, встречается только при специально подобранных возмущениях.

Введение τ-циклического преобразования (2) в отображение (1) означает, что результирующее преобразование (3) будет иметь форму

$$\mathbf{T}_a = \begin{cases} T_{a_1}\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_1) \equiv \mathbf{f}_1, \\ \qquad \ldots \\ T_{a_\tau}\colon \mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}, a_\tau) \equiv \mathbf{f}_\tau. \end{cases} \tag{4}$$

Введем в рассмотрение функции: $\mathbf{F}_1 = \mathbf{f}_\tau(\mathbf{f}_{\tau-1}(\ldots\mathbf{f}_2(\mathbf{f}_1(\mathbf{x}))\ldots))$, $\mathbf{F}_2 = \mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\tau(\mathbf{f}_{\tau-1}(\ldots\mathbf{f}_3(\mathbf{f}_2(\mathbf{x}))\ldots)))$, …, $\mathbf{F}_\tau = \mathbf{f}_{\tau-1}(\mathbf{f}_{\tau-2}(\ldots\mathbf{f}_1(\mathbf{f}_\tau(\mathbf{x}))\ldots))$, где $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathbf{f}_i = \{f_i^{(1)}, \ldots, f_i^{(n)}\}$, $\mathbf{F}_i = \{F_i^{(1)}, \ldots, F_i^{(n)}\}$ – n-компонентные функции, $i = 1, \ldots, \tau$. Таким образом, возмущенное отображение представится как декомпозиция

$$T_1 : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}_1, \ldots, T_\tau : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{F}_\tau, \tag{5}$$

для которой начальные условия определяются как $\mathbf{x}_1 = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_0)$, …, $\mathbf{x}_{\tau-1} = \mathbf{f}_{\tau-1}(\mathbf{x}_{\tau-2})$. Теперь можно доказать, что если отображение T_k, $1 \le k \le \tau$, имеет цикл периода t и функции $\mathbf{f}_k(\mathbf{x})$ являются непрерывными, то отображение T_p, $p = k + 1 \pmod{\tau}$, имеет цикл того же периода t (Loskutov, 2006, p. 1157). Если цикл отображения T_k является устойчивым, то цикл отображения T_p также будет устойчивым. Более того, если $\mathbf{f}_k$ – гомеоморфизм, то отображения T_k и T_p – топологически эквивалентны.

Основной смысл описанного построения заключается в том, что вместо исходного неавтономного отображения (3) достаточно рассмотреть *одно из автономных* отображений $T_1,\ldots, T_\tau$, определяемое выражением (5). Это справедливо для *любого* множества допустимых значений A параметра a (в том числе соответствующих хаотическому поведению) динамической системы с периодическим возмущением.

Далее, поскольку нас интересует возможность подавления хаоса, введем подмножество $A_c \in A$, отвечающее *хаотическому* поведению отображения (1). Пусть Λ – компактное инвариантное множество относительно T_a. Отображение T_a называется *топологически транзитивным*, если для любых двух открытых множеств Ω_1, Ω_2 найдется число n, такое, что $T_a^n\, \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \varnothing$. Говорят, что отображение T_a имеет *чувствительную зависимость от начальных условий* на Λ, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\mathbf{x} \in \Lambda$ и в любой окрестности U точки x существуют $\mathbf{y} \in U$ и $n > 0$, для которых $|\, T_a^n\, \mathbf{x} - T_a^n\, \mathbf{y}\,| > \varepsilon$. Свойство плотности периодических траекторий означает, что в любой окрестности любой точки в Λ существует по крайней мере одна (и, следовательно, бесконечно много) периодических траекторий.

Отображение T_a называется *хаотическим*, если (Devaney, 1993):

а) T_a является топологически транзитивным на Λ;

б) циклы отображения T_a плотны в Λ;

в) T_a имеет чувствительную зависимость от начальных условий.

Следовательно, хаотическое отображение должно обладать тремя важными свойствами: непредсказуемостью, неразложимостью и элементом регулярности. Однако не так давно было обнаружено, что в данном определении хаотичности условие чувствительной зависимости от начальных условий является избыточным (Banks et al., 1992, p. 332). Иными словами, если отображение T_a: $\Lambda \to \Lambda$ непрерывно и транзитивно, а циклы плотны в Λ, то T_a обладает существенной зависимостью от начальных условий.

В (Assaf, Gadbois, 1992, p. 865) было показано, что в определении хаотичности транзитивность и плотность циклов не следуют из оставшихся двух условий. Более того, транзитивность и чувствительная зависимость устойчивы по отношению к замыканию, а также при ограничении на плотные инвариантные подмножества (Knudsen, 1994, p. 563). По-видимому, отображение, заданное на компактном множестве, может быть определено как хаотическое, если оно обладает чувствительной зависимостью от начальных условий и имеет плотно расположенные циклы.

Таким образом, основной особенностью хаотичности является *чрезвычайная чувствительность* к малым возмущениям. Это означает, что решения возмущенной системы будут экспоненциально быстро отклоняться от решений невозмущенной системы. Идея стабилизации хаотических колебаний основана именно на этом свойстве: найти такие внешние воздействия, которые приводили бы к вырождению хаоса, т.е. к выходу системы из хаотического режима на регулярный. При внешней простоте формулировки решение этой проблемы для ряда динамических систем оказывается достаточно сложной задачей.

Впервые решение такой задачи для определенного класса систем было опубликовано в работе (Алексеев, Лоскутов, 1987). Это решение получило строгое обоснование в публикациях (Лоскутов, Шишмарев, 1993; Loskutov, Shishmarev, 1994, p. 351). Немного позже был предложен метод управления хаотическими динамическими системами, учитывающий обратную связь (Ott, Grebogi, Yorke, 1990, p. 1196). Публикация этих результатов стимулировала изучение проблемы подавления хаоса и вызвала большой интерес к исследованию возможности управления такими системами. В связи с многочисленными приложениями эта проблема стала предметом экспериментального анализа (см. обзоры в (Loskutov, 2001; Boccaletti et al., 2000, p. 101)).

Развитие подобных идей показало (Loskutov, 2006), что для управления системами с неустойчивым или хаотическим поведением и вывода их на требуемый режим эволюции достаточно использовать простые параметрические возмущения. Такие возмущения – результат анализа обратной задачи, когда неизвестными являются параметры, которые можно найти как решения уравнений на заданный цикл. В частности, справедлив следующий точный результат (Loskutov, 2006; Лоскутов, Шишмарев, 1993). Для определенных динамических систем существует подмножество $\mathbf{A}_d \subset \mathbf{A}_c$ возмущений $g(a)$, реализуемых на хаотическом множестве $\mathbf{A}_c$, такое, что если $\hat{a} \in \mathbf{A}_d$, то возмущенные отображения будут обладать устойчивыми циклами конечных периодов. Иными словами, если подобрать подходящие внешние возмущения для хаотической системы, то можно ожидать появления устойчивого поведения. В ряде случаев, используя обобщенную теорию Мельникова, нетрудно найти их аналитический вид (Лоскутов, Джаноев, 2004, с. 1194). При этом если удается стабилизировать практически любой заранее выбранный цикл в возмущенном отображении, то становится возможным осуществить *полный контроль* над системами, в том числе и не обладающими хаотическим поведением (Loskutov, 2006; Лоскутов, Шишмарев, 1993).

Для приложений (в том числе экономических) наиболее важными выводами из этих результатов являются следующие:

– подмножество $\mathbf{A}_d$ открыто (Loskutov, Tereshko, Vasiliev, 1996, p. 725);

– существуют аналитические оценки допустимых искажений в модели и значениях параметров, при которых не разрушаются стабилизированные циклы (Loskutov, 2006).

Таким образом, внешний шум, неточности в задании параметров и (или) динамических переменных и другие факторы не могут изменить динамику системы со стабилизированным поведением. Это означает, что для близких систем стабилизированная динамика сохранится. Рассмотрим, как можно использовать изложенную в этом разделе теорию в экономических приложениях.

3. МОДЕЛЬ

В данном разделе рассмотрен простой, но достаточно характерный пример экономической модели, иллюстрирующий явление хаотичности на рынке товаров, образованном двумя конкурирующими фирмами. Хотя рассмотренная ситуация описывается только модельными уравнениями, однако она позволяет показать, как можно практически использовать представленную выше математическую теорию.

Часто на рынке какого-либо товара существуют два основных конкурента – две фирмы, между которыми разворачивается конкурентная борьба. Одна из моделей такого поведения была предложена в работе (Feichtinger, 1992, p. 141). Там описана ситуация, когда на определенном сегменте рынка существуют два основных игрока (две фирмы) X и Y, которые конкурируют между собой. Предполагается, что фирмы ведут активные *асимметричные* инвестиционные стратегии, так что текущий уровень инвестиций фирмы зависит от ее положения в предшествующем периоде. Фирма X инвестирует больше в том случае, если у нее было преимущество относительно фирмы Y; фирма Y инвестирует больше, если в прошлый период она проигрывала фирме X.

В работе (Feichtinger, 1992) было показано, что данная модель может описываться двумерной системой разностных уравнений:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n, y_n, a, c, \alpha) = (1-\alpha)x_n + a/(1+\exp[-c(x_n - y_n)]), \\ y_{n+1} = h(x_n, y_n, b, c, \beta) = (1-\beta)y_n + b/(1+\exp[-c(x_n - y_n)]), \end{cases} \tag{6}$$

где x_n, y_n – продажи обеих фирм, взятые через дискретные временные интервалы $n = 1, 2, \ldots$; постоянные α и β, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, – скорости падения продаж в отсутствие инвестиций, т.е. при a, $b = 0$. В последнем случае, очевидно, последовательности, порождаемые отображениями $x_{n+1} = (1 - \alpha)x_n$ и $y_{n+1} = (1 - \beta)y_n$, будут стремиться к тривиальной устойчивой неподвижной точке.

Второе слагаемое в обоих уравнениях описывает, как инвестиционные вложения, сделанные в момент времени n, влияют на уровень продаж в последующем временном интервале $n + 1$. Параметры a и b задают эффективность инвестиций обеих фирм, а параметр c – меру эластичности инвестиционных стратегий. Строго говоря, a и b характеризуют добавки к продажам, полученные за счет инвестиций (Feichtinger, 1992, p. 146–151).

В зависимости от параметров α, β, a, b и c решение данной системы может быть регулярным или хаотическим. Для дальнейших исследований примем значения α, β, c, а также начальные условия x_0 и y_0 в соответствии с (Feichtinger, 1992): $\alpha = 0.46$, $\beta = 0.7$, $c = 105$, $x_0 = 0.01$, $y_0 = 0.02$. Параметры a и b, ответственные за эффективность инвестиций, оставим свободными. Это обусловлено тем, что решение о размере инвестиций принадлежит менеджменту фирмы и в зависимости от складывающейся ситуации оно может изменяться.

Для того чтобы исследовать поведение модели (6), необходимо установить области, где система проявляет хаотические свойства. Это нетрудно сделать, используя известные критерии динамического хаоса, такие как показатели Ляпунова, спектральная плотность и др. (Mikhailov, Loskutov, 1995). Области хаотичности в пространстве параметров a и b (при фиксированных значениях α, β, c) представлены на рис. 1. Они обозначены оттенками серого цвета, соответствующими различной глубине хаоса. Самому темному оттенку (черный цвет) отвечают максимально возможные для данной системы значения показателя Ляпунова. Переход к хаосу при изменении параметров a и b осуществляется путем каскада бифуркаций удвоения периода.

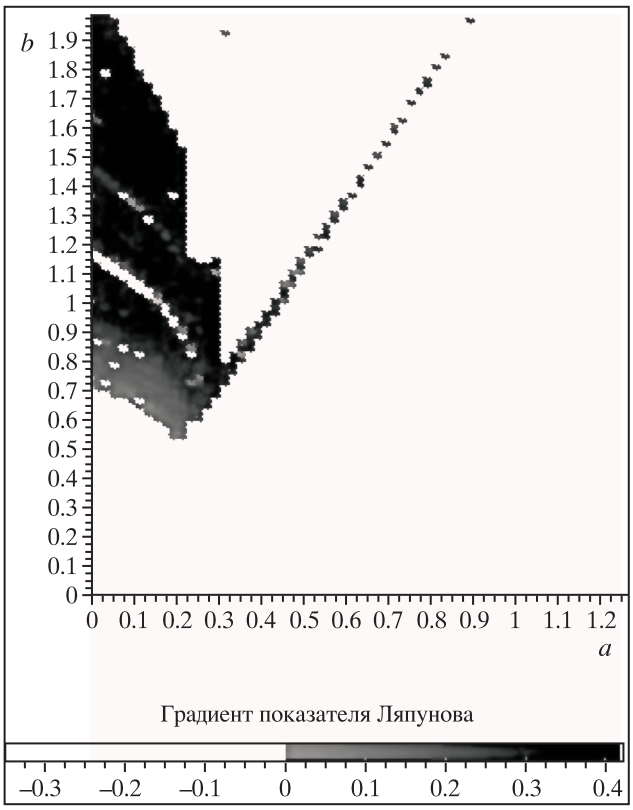

Рис. 1. Области хаотичности системы (6) в пространстве параметров (a, b)

Далее, чтобы оптимизировать работу фирмы, необходимо подобрать такой способ изменения параметров, отвечающих за динамику системы (6), чтобы было возможно вывести ее на заранее заданный (периодический) режим функционирования. Если первоначально фирмы находятся в ситуации, когда рынок неустойчив или хаотичен, эта задача сводится к стабилизации или подавлению хаоса с помощью варьирования параметров, ответственных за размер инвестиций. С экономической точки зрения это означает, что департамент стратегического развития фирмы выбирает особый режим инвестирования, который, как ожидается, приведет к изменению ситуации на рынке. В результате уровни продаж начинают эволюционировать предсказуемо – периодически. При этом необходимо, чтобы все размеры инвестиций были доступными для фирм и не требовали дополнительных затрат, т.е. параметры системы (6) должны очень мало отличаться от тех, которые использовались до введения новой политики, и отвечать области хаотичности.

Если такое управление допустимо, то, как показано далее в разд. 4, реализуется стабилизация хаотической динамики рынка, причем каждая фирма в среднем начинает получать бóльшую прибыль. Если же ситуация на рынке изначально стабильна, то задача сводится к оптимизации инвестирования так, чтобы вывести систему на заранее выбранный режим функционирования.

Очевидно, что описанная в данном разделе модель относится к классу динамических систем, исследованных в разд. 2. Следовательно, для нее существуют определенные параметрические возмущения, приводящие к подавлению хаотической динамики и выходу на регулярный режим эволюции. При этом интересен вопрос о том, *каким будет доход каждой фирмы* после стабилизации динамики рынка и насколько будет трудоемким параметрическое воздействие вида (2) для предприятия, осуществляющего такую новую политику управления.

4. СТАБИЛИЗАЦИИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ РЫНКА. УВЕЛИЧЕНИЕ ПРИБЫЛИ

В этом разделе мы, используя модель (6), исследуем возможность стабилизации рынка, на котором действуют конкурирующие предприятия. В результате такого анализа мы увидим, что изменения параметров системы, отвечающих за инвестиции, ведут не только к возможности осуществления точного прогноза, но и к увеличению прибыли каждого из предприятий. При этом достаточно, чтобы такую политику вела только одна из фирм.

Предположим, что фирмы X и Y первоначально находятся в ситуации, когда рынок нестабилен, так что уровни продаж изменяются хаотическим образом. Пусть менеджмент фирмы X поставил задачу найти способ стабилизации уровня продаж так, чтобы в последующие периоды можно было предсказать их динамику. При этом данная проблема должна быть решена с помощью ресурсов, доступных фирме. Подход к этой задаче может быть осуществлен с помощью теории управления хаотическими системами. Именно используя приведенные в разд. 2 результаты, фирма X может начать инвестировать в соответствии с описанными ниже политиками.

Наиболее простой способ стабилизации рынка – введение простейшего периодического изменения приемлемых (с той или иной точки зрения) параметров. Таким изменением является, очевидно, возмущение периода $\tau = 2$. Следовательно, при одном фиксированном параметре (например, b) необходимо циклически переключать другой параметр между выбранными значениями $a_1 \in A_c$ и $a_2 \in A_c$, добиваясь при этом нужного режима функционирования.

В явном виде преобразование с возмущением периода 2, описывающее динамику фирм, можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} x_{2n+1} = f_1(x_{2n}, y_{2n}, a_1, c, \alpha), \\ y_{2n+1} = h(x_{2n}, y_{2n}, b, c, \beta), \end{cases} \quad \begin{cases} x_{2n+2} = f_2(x_{2n+1}, y_{2n+1}, a_2, c, \alpha), \\ y_{2n+2} = h(x_{2n+1}, y_{2n+1}, b, c, \beta), \end{cases} \tag{7}$$

где $a_1, a_2 \in A_c$. Следовательно, задача сводится к нахождению параметров из области хаотичности A_c, последовательное переключение между которыми приводит к выходу системы на регулярный режим эволюции и вырождению хаоса. Другими словами, департамент управления фирмой постоянно должен менять уровень инвестиций между заданными значениями, несмотря на то, что данная стратегия может казаться нецелесообразной. Это оправдано тем, что такая политика позволяет не только стабилизировать рынок, но и в среднем увеличить прибыль.

На рис. 2 представлен пример такой стабилизации рынка посредством возмущения *периода 2*: при выбранных величинах a_1 = 0.147, a_2 = 0.225, b = 0.74, a_1, a_2 $\in A_c$, система достаточно

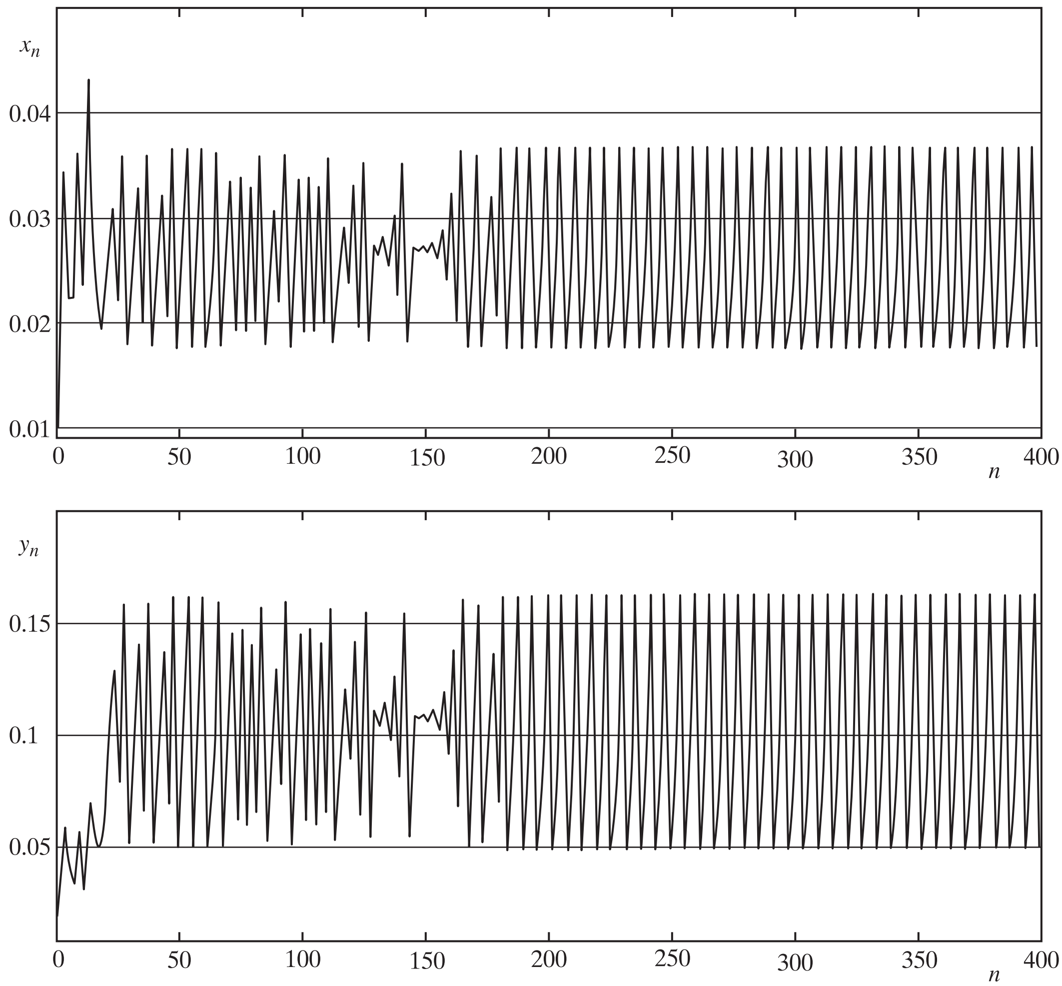

Рис. 2. Пример стабилизации рынка посредством управления периода 2 при $a_1 = 0.147$, $a_2 = 0.225$, $b = 0.74$, $a_1, a_2 \in A_c$

быстро (при $n = 175$) выходит на регулярный режим функционирования. При этом уровни продаж представляют собой периодическое (а следовательно, и однозначным образом прогнозируемое) поведение. Для сравнения на рис. 3 показана зависимость продаж фирмы X от времени при $a = a_1 = 0.147$ и $a = a_2 = 0.225$, $b = 0.74$. Анализ таких характеристик, как спектральная плотность, показатели Ляпунова и т.п., позволяет сделать вывод, что динамика системы в этих случаях является хаотической.

Как следует из полученных результатов, подавление хаоса посредством изменений объемов инвестиций может осуществляться даже силами *только одной* фирмы. Однако при этом уровни продаж *обеих фирм* выходят на регулярный режим. Таким образом, новая инвестиционная политика одного участника рынка приводит к стабилизации динамики другого участника и рынка в целом.

На рис. 4 белым цветом показаны области значений параметров (a_1, a_2) при $b = 0.74$, отвечающие размерам инвестиций, при переключении между которыми имеет место подавление хаоса. Серый и черный цвета соответствуют хаотическому режиму возмущенной системы. Нетрудно увидеть, что области стабилизированного поведения занимают относительно небольшую область в пространстве (a_1, a_2). Следовательно, только небольшая доля параметрических возмущений приводит к стабилизированной динамике системы. Кроме того, в некоторых областях значения (a_1, a_2) могут очень мало отличаться друг от друга.

Таким образом, малые размеры стабилизированных областей ограничивают практическую реализацию метода. Однако, с другой стороны, если для изучаемой системы эти области суще-

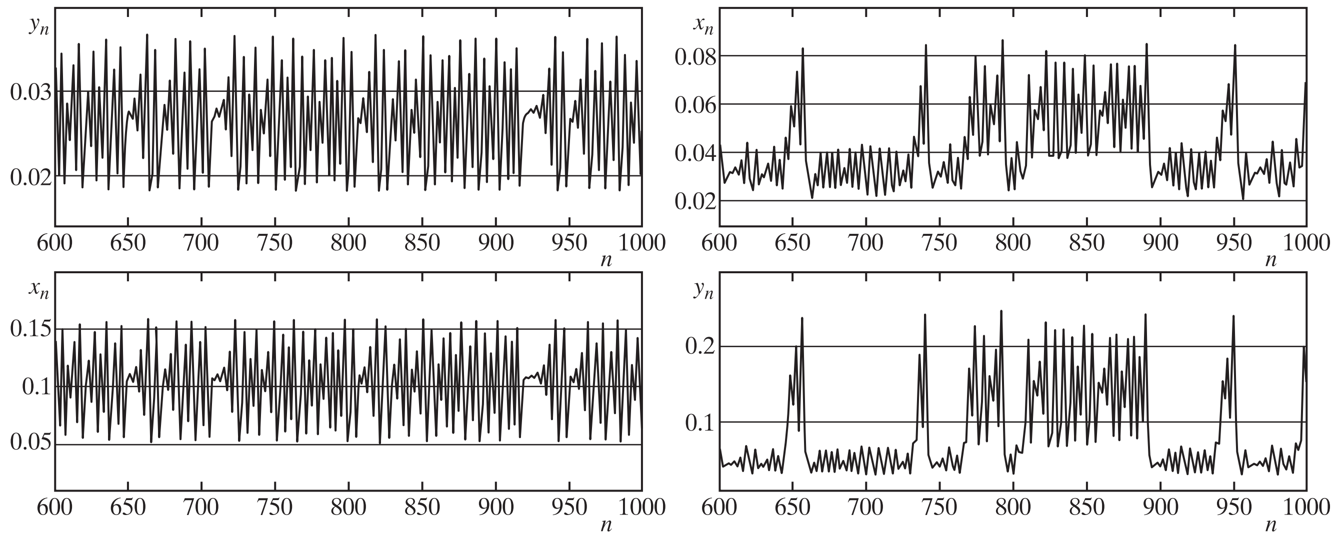

Рис. 3. Хаотическая зависимость уровня продаж фирм X и Y при a_1 = 0.147 (слева) и a_2=0.225 (справа), b = 0.74, $a_1, a_2 \in A_c$

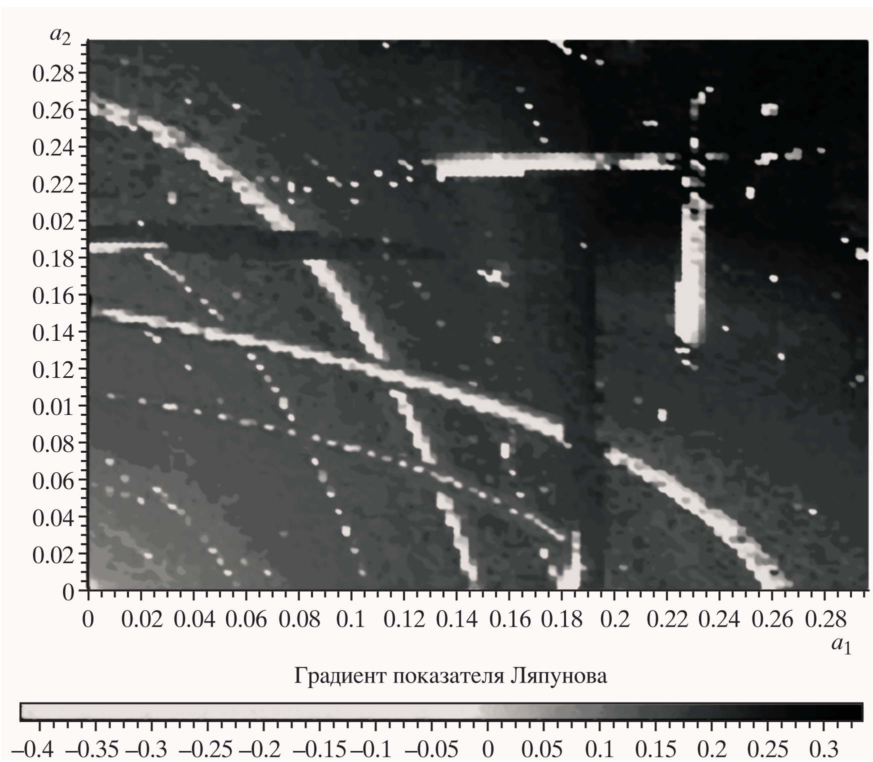

Рис. 4. Области стабилизированного поведения (белый цвет) системы (6) в пространстве $(a_1,a_2) \in A_c$ при параметрическом воздействии периода 2

ствуют, то для получения стабилизированной динамики достаточно только незначительно изменять значения параметров (в данном случае объем инвестиций).

Аналогичный результат можно получить и при несколько более сложной политике управления, например при реализации возмущения *периода 3*. Тогда циклическое переключение будет осуществляться между тремя уровнями инвестирования:

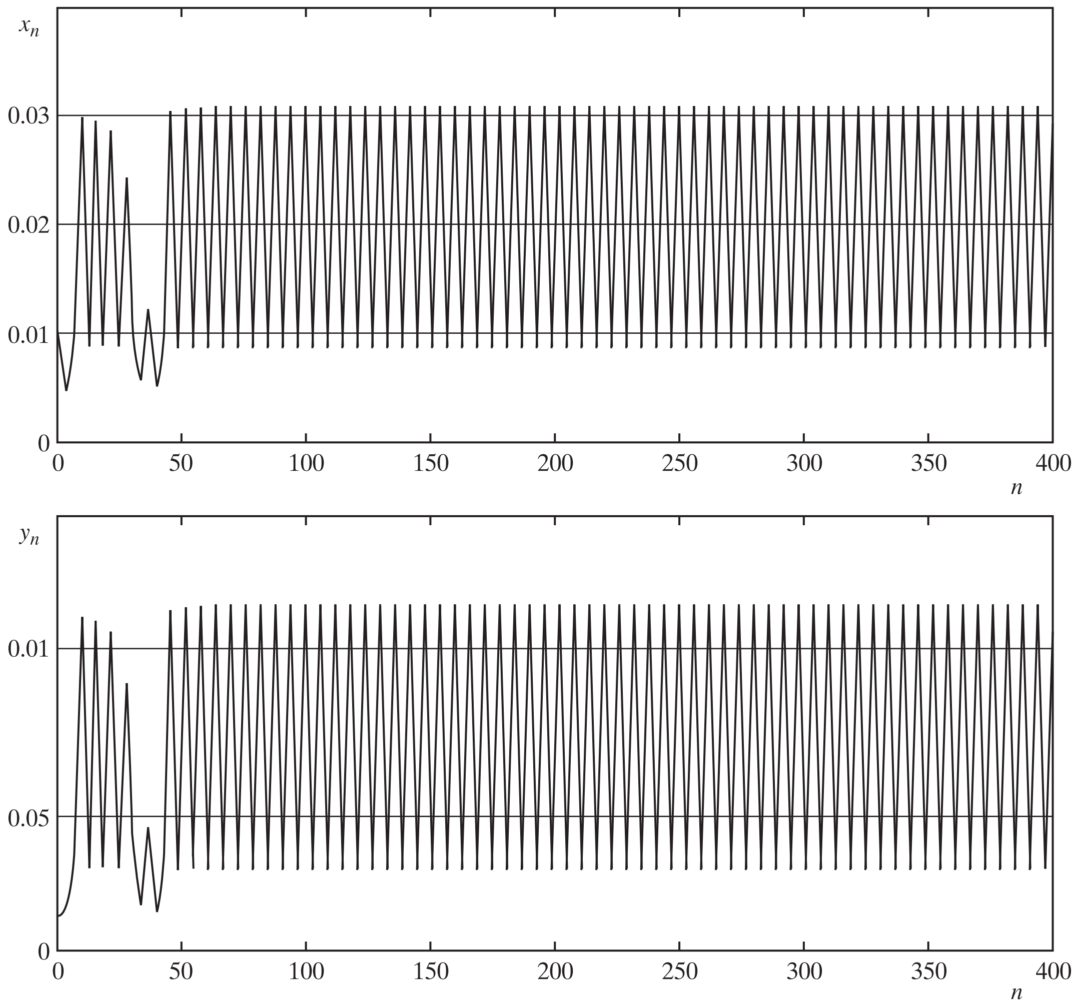

Рис. 5. Стабилизация хаотического поведения рынка воздействием периода 3: $(a_1, a_2, a_3) = (0.03, 0.051, 0.2)$, $b = 0.74$, $a_i \in A_c$, $i = 1, 2, 3$

$$
\begin{cases} x_{3n+1} = f_1(x_{3n}, y_{3n}, a_1, c, \alpha), \\ y_{3n+1} = h(x_{3n}, y_{3n}, b, c, \beta), \end{cases}
\begin{cases} x_{3n+2} = f_2(x_{3n+1}, y_{3n+1}, a_2, c, \alpha), \\ y_{3n+2} = h(x_{3n+1}, y_{3n+1}, b, c, \beta), \end{cases}
\begin{cases} x_{3n+3} = f_3(x_{3n+1}, y_{3n+2}, a_3, c, \alpha), \\ y_{3n+3} = h(x_{3n+2}, y_{3n+2}, b, c, \beta), \end{cases} \tag{8}
$$

где $a_1, a_2, a_3 \in A_c$. Преимущество управления периода 3 состоит в том, что возрастает число возможных способов достижения требуемого состояния рынка с помощью различных уровней инвестиций. Таким образом, политика фирмы может быть более гибкой, так как появляется больше возможностей для реализации желаемого результата. На рис. 5 приведен пример успешного управления инвестициями этого периода. Все значения параметров a_i, $i = 1, 2, 3$, соответствуют области хаотичности исходной невозмущенной системы, $a_i \in A_c$, т.е. уровни продаж в уравнениях (6) меняются хаотическим образом. Однако при последовательном переключении между ними динамика системы стабилизируется и переходит от хаотического режима к регулярному.

Можно еще увеличить гибкость управления, осуществляя воздействие периода 4 и выше. При этом динамика систем становится, согласно результатам разд. 2, более сложной, но всегда остается периодической с периодом $t = \tau k$, где τ – период возмущения, k – целое положительное число.

Нетрудно прийти к выводу, что, используя данные инвестиционные политики (т.е. возмущения периода 2 и больше), фирмы в среднем будут получать большую прибыль, т.е. проведение подобных политик оказывается выгодным обеим фирмам. Это легко показать при помощи сравнительного анализа уровня продаж при постоянном инвестировании среднего размера и проведении предложенной политики управления. В результате такого анализа получается, что при внедрении периодического управления *возрастает средний уровень продаж* фирм X и Y. В то же время, если бы фирма X просто осуществляла инвестиции среднего размера, то уровень продаж для фирмы X и Y был бы ниже. Таким образом, очевидно, что при проведении подобной политики можно в среднем *инвестировать меньше, а получать больше*. Это довольно неожиданный, но важный вывод, который может иметь большие последствия для предприятий, осуществляющих описанную стратегию инвестирования на хаотическом рынке.

Однако такое поведение менеджеров фирм приводит к положительному результату только в случае *первоначально хаотических отношений*. В случае же регулярной динамики, как следует из результатов разд. 2, можно найти такое периодическое изменение внутренних ресурсов, при которых также имеет место увеличение прибыли. Математически такая политика возможна вследствие результата о полном контроле над динамикой, когда удается вывести систему на любой предписанный режим эволюции (Loskutov, 2006). Однако здесь требуется несколько иной подход, при котором вариации параметров могут не быть малыми.

При успешном использовании такой политики одной из фирм асимметричная стратегия инвестирования (со стороны обеих фирм) сохраняется. В этом случае для фирмы, осуществляющей стабилизацию, имеет место *модернизация асимметричной стратегии* (т.е. более тонкое и успешное поведение на рынке). Вполне очевидна ситуация, когда департамент стратегического развития только одной из фирм обнаружил такой способ увеличить прибыль. Тогда вторая фирма вовсе не обязана менять свою изначальную стратегию инвестирования.

Отметим, что в работе (Holyst et al., 1996, p. 31) сходные выводы были получены посредством управления с обратной связью. При этом на каждом шаге было необходимо корректировать воздействие, как этого требует метод (Ott, Grebogi, Yorke, 1990), что гораздо труднее реализовать на практике.

Таким образом, можно сделать интересный вывод о том, что имеется достаточно эффективный и очень простой механизм увеличения среднего объема продаж для предприятий, выступающих на товарном рынке. В каждом конкретном случае можно подобрать новые стратегии поведения фирм, находящихся в условиях хаотической конкуренции. Это позволит, используя только внутренние ресурсы и не вступая в сговор, не только повысить прибыль, но и осуществить прогноз развития ситуации. Реализация такой политики возможна вследствие того, что мера множества управляющих значений параметров $\mathbf{A}_d$ положительна (см. разд. 2).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С проблемой увеличения прибыли за счет внутренних ресурсов сталкиваются все предприятия, и от ее успешного решения зависит их дальнейшее развитие и конкурентоспособность. Осуществляя планирование, необходимо учитывать поведение конкурентов и адаптировать стратегию развития в соответствии с условиями, которые складываются на рынке товаров, где функционирует данное предприятие.

В данной работе предложен эффективный способ, который помогает строить стратегию развития конкурирующих фирм. Он заключается в возможности стабилизации хаотического поведения рынка. При этом, несмотря на то что политику, направленную на такую стабилизацию, может проводить только одна фирма, результат оказывается взаимовыгодным. Исследованная модель описывает две фирмы, которые действуют на определенном сегменте рынка. Хотя такая ситуация и может, в принципе, встретиться в реальности, все же она достаточно редка. Однако пример, приведенный в разд. 3 и 4, можно рассматривать как пояснение общих результатов о стабилизации хаотической динамики, представленных в разд. 2. Подобные политики могут оказаться успешными и на достаточно сложном рынке. Данное утверждение основано на том факте, что для широкого класса систем предложенные внешние воздействия приводят к стабилизации хаотического и (или) неустойчивого поведения. При этом одним из основных условий является переход к регулярному движению с помощью ресурсов, которыми обладает фирма, т.е. уровни инвестирования должны принадлежать области хаотичности. Это означает, что фирма не нуждается в дополнительных затратах на достижение требуемого результата.

Однако необходимо отметить два принципиально важных момента. Первый связан с тем, что другие фирмы могут иметь незначительное влияние на рынке по сравнению с двумя лидерами. Их вклад легко учесть аддитивным слагаемым, которое лишь немного изменит области хаотичности, сохранив при этом основной характер поведения модели. Второй момент соответствует обобщению при помощи введения большего числа фирм, реально влияющих на ситуацию на рынке. В этом случае изначальный вид модели модифицируется таким образом, что в невозмущенном состоянии фирмы инвестируют в зависимости от своего относительного положения на рынке, т.е.

$$x_i - (\Sigma_{i=1}^{n} x_i)/n,$$

где i – номер фирмы; n – общее число фирм.

Из анализа проблемы управления (разд. 2) следует также, что при неточностях, неучтенных внешних факторах и т.п., размывающих требуемые значения параметров и динамических переменных, *стабилизированная динамика сохранится*. Поэтому метод и полученные результаты будут верны и для близких систем. Более того, при общем подходе не требуется задавать конкретный вид уравнений.

Таким образом, мы имеем достаточно эффективный инструмент, позволяющий осуществлять стабилизацию и, как следствие, увеличивать прибыль предприятий, действующих на хаотическом рынке. Однако при этом необходимо аккуратно подходить к проблеме выбора варьируемых параметров, так как возмущение некоторых из них не дает возможность решить проблему стабилизации и подавления хаоса (Schwalger, Dzhanoev, Loskutov, 2006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Алексеев В.В., Лоскутов А.Ю. (1987): Управление системой со странным аттрактором посредством периодического параметрического воздействия // *Доклады Академии наук СССР.* Т. 293. № 6.

Лоскутов А.Ю., Джаноев А.Р. (2004): Подавление хаоса в окрестности сепаратрисы // *ЖЭТФ.* Т. 125. Вып. 5.

Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. (2007): Основы теории сложных систем. М.: РХД.

Лоскутов А.Ю., Шишмарев А.И. (1993): Об одном свойстве семейства квадратичных отображений при параметрическом воздействии // *Успехи мат. наук*. Т. 48. № 1.

Неймарк Ю.И. (1978): Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука.

Пу Т. (2002): Нелинейная экономическая динамика. М.; Ижевск: УРСС.

Ahmed E., Hassan S.Z. (2000): On Controlling Chaos in Cournot-Games with Two and Three Competitors // *Nonlinear Dynamics, Phychology, and Life Sciences*. Vol. 4. № 2.

Assaf IV D., Gadbois S. (1992): Definition of Chaos // *American Math. Monthly*. Vol. 99.

Banks J., Brooks J., Cairns G., Davis G., Stacey P. (1992): On Devaney's Definition of Chaos // *American Math. Monthly*. Vol. 99.

Boccaletti S., Grebogi C., Lai Y.-C., Mancini H., Maza D. (2000): The Control of Chaos: Theory and Applications // *Physics Reports*. Vol. 329.

Devaney R.L. (1993): An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. N.Y.; Amsterdam: Addison-Wesley Publishing Co.

Feichtinger G. (1992): Economic Evolution and Demographic Change. Berlin: Springer.

Holyst J.A., Hagel T., Haag G., Weidlich W. (1996): How to Control a Chaotic Economy? // *J. of Evolutionary Econ*. Vol. 6.

Holyst J.A., Urbanowicz K. (2000): Chaos Control in Economical Model by Time-Delayed Feedback Method // *Physica A*. Vol. 287.

Holyst J.A., Zebrowska M., Urbanowicz K. (2001): Observations of Deterministic Chaos in Financial Time Series by Recurrence Plots, Can One Control Chaotic Economy? // *The European Physical J. B – Condensed Matter and Complex Systems*. Vol. 20.

Knudsen C. (1994): Chaos without Periodicity // *American Math. Monthly*. Vol. 101.

Kopel M. (1997): Improving the Performance of an Economic System: Controlling Chaos // *J. of Evolutionary Econ*. Vol. 7.

Kostelich E., Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. (1993): Higher Dimensional Targetting // *Physical Rev. E*. Vol. 47.

Loskutov A. (1993): Dynamics Control of Chaotic Systems by Parametric Destochastization // *J. Physics A*. Vol. 26. № 18.

Loskutov A. (1995): Non-Feedback Controlling Complex Behaviour of Dynamical Systems: An Analytic Approach. In: "*Nonlinear Dynamics: New Theoretical and Applied Results*". Berlin: Academie Verlag.

Loskutov A. (2001): Chaos and Control in Dynamical Systems // *Computational Math. and Modeling*. Vol. 12. № 4.

Loskutov A. (2006): Parametric Perturbations and Non-Feedback Controlling Chaotic Motion // *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series B*. Vol. 6. № 5.

Loskutov A., Shishmarev A.I. (1994): Control of Dynamical Systems Behavior by Parametric Perturbations: an Analytic Approach // *Chaos*. Vol. 4. № 2.

Loskutov A., Tereshko V.M., Vasiliev K.A. (1996): Stabilization of Chaotic Dynamics of One-Dimensional Maps // *The International J. of Bifurcation and Chaos*. Vol. 6. № 4.

Meucci R., Gadomski W., Ciofini M., Arecchi F.T. (1994): Experimental Control of Chaos by Weak Parametric Perturbations // *Physics Rev. E*. Vol. 49. № 4.

Mikhailov A.S., Loskutov A. (1995): Chaos and Noise. Berlin: Springer.

Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. (1990): Controlling Chaos // *Physics Rev. Lett.* Vol. 64.

Schwalger T., Dzhanoev A., Loskutov A. (2006): May Chaos Always Be Suppressed by Parametric Perturbations? // *Chaos*. № 16.

Shinbrot T., Grebogi C., Ott E., Yorke J.A. (1992): Using Chaos to Target Stationary States of Flows // *Physics Lett. A*. Vol. 169.

Shinbrot T., Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. (1990): Using Chaos to Direct Trajectories to Targets // *Physics Rev. Lett.* Vol. 65.

Shinbrot T., Ott E., Grebogi C., Yorke J.A. (1992): Using Chaos to Direct Orbits to Targets in Systems Describable by a One-Dimensional Map // *Physics Rev. A*. Vol. 45. № 6.

Zhang W.-B. (1997): Synergetic Economics. Berlin: Springer.

Поступила в редакцию
20.06.2005 г.

Nonlinear Optimization of the Chaotic Market Dynamics

A.Yu. Loskutov

In the framework of the theory of dynamical systems a problem of stabilization of chaotic behavior of the good market created by competing firms is considered. The analysis is carried out on the basis of investigations of a quite simple model of two firms which follow the active and asymmetric investment strategies and develop in one and the same market. In the parametric space of the given model areas corresponding to its chaotic behavior are described. It is shown that by means of weak variations of the parameters corresponding to the efficiency of the investment size it is possible to suppress chaos and convert the dynamics of both firms to a periodic regime of functioning. As a result, the situation in the market is stabilized, and both firms increase their profit. It is found that to get this result it is sufficient that only one firm carries the given trade policy. Generalizations of the obtained conclusion in the case of a large number of competitors are presented. The elements of mathematical theory of the stabilization of chaotic dynamical systems are given.

Keywords: chaotic dynamics, goods market, chaos suppression, competition model.