Анализ временных рядов

А. Ю. Лоскутов

Физический факультет МГУ

Аннотация

В настоящее время для изучения свойств сложных систем, в том числе и при экспериментальных исследованиях, широко используется подход, основанный на анализе сигналов, произведенных системой. Это очень актуально в тех случаях, когда математически описать изучаемый процесс практически невозможно, но в нашем распоряжении имеется некоторая характерная наблюдаемая величина. Поэтому анализ систем, особенно при экспериментальных исследованиях, часто реализуется посредством обработки регистрируемых сигналов. Например, в аритмологии в качестве такого сигнала используется электрокардиограмма, в сейсмологии — запись колебаний земной коры, в метеорологии — данные метеонаблюдений и т.п. Обычно такой сигнал называется наблюдаемой, а метод исследования — реконструкцией динамических систем. Этот раздел теории динамических систем называется *анализом временны́х рядов*.

Наблюдаемая — это последовательность значений некоторой переменной (или переменных), регистрируемых непрерывно или через некоторые промежутки времени. Часто вместо термина наблюдаемая используется понятие временно́й ряд. Ясно, что наличие только лишь временного ряда вместо полного решения уравнений сильно ограничивает наши знания об изучаемой системе. Это налагает большие ограничения на возможности метода реконструкции.

Скалярным временным рядом $\{x_i\}_{i=1}^N$ называется массив из N чисел, представляющих собой значения некоторой измеренной (наблюдаемой) динамической переменной $x(t)$ с некоторым постоянным шагом τ по времени, $t_i = t_0 + (i-1)\tau$: $x_i = x(t_i)$, $i = 1, \dots, N$. В анализе временных рядов выделяются две основные задачи: задача идентификации и задача прогноза.

Задача идентификации при анализе наблюдаемых предполагает ответ на вопрос, каковы параметры системы, породившей данный временной ряд — размерность вложения, корреляционная размерность, энтропия и др. Размерность вложения — это минимальное число динамических пере-

менных, однозначно описывающих наблюдаемый процесс. Корреляционная размерность является оценкой фрактальной размерности аттрактора системы и частным случаем обобщенной вероятностной размерности. Понятие энтропии связано с предсказуемостью значений ряда и всей системы.

Задача прогноза имеет целью по данным наблюдений предсказать будущие значения измеряемых характеристик изучаемого объекта, т.е. составить прогноз на некоторый отрезок времени вперед. Сейчас разработано и обосновано несколько различных методов прогноза. Однако все они подразделяются на на два основных класса: локальные и глобальные. Такое деление проводится по области определения параметров аппроксимирующей функции, рекуррентно устанавливающей следующее значение временного ряда по нескольким предыдущим.

Исторически первыми были разработаны глобальные методы, в которых на основе статистического анализа предлагалось использовать авторегрессию, скользящее среднее и др. Позже в рамках нелинейной динамики были разработаны новые практические методики:

• сингулярный спектральный анализ (SSA), который является глобальным методом;

• локальная аппроксимация (LA);

• сочетание SSA–LA.

Исследование временных рядов базируется на идее, что удовлетворительную геометрическую картину странного аттрактора можно получить, если вместо переменных, входящих в исходную систему, использовать так называемые векторы задержек наблюдаемой $z_i = \{x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+m-1}\}$. Впервые данный подход к анализу временных рядов был математически обоснован в работе Ф.Такенса.

Таким образом, наиболее интригующим и заманчивым приложением теории динамических систем является прогнозирование динамики порождаемых ими временны́х рядов. При этом предполагается, что *a priori* характеристики систем, которые порождают этот ряд, могут быть неизвестны.

Сейчас стало ясно, что теория игр теснейшим образом переплетена с теорией динамических систем, фрактальных множеств и нелинейной динамикой, поскольку большинство реальных временны́х рядов имеют самоподобную структуру. Эта особенность позволяет переосмыслить подходы к анализу временных рядов и иным (в основном, более успешным образом) подойти к их описанию. При этом выявляются различные стратегии прогноза , обосновывается невозможность использовать здравый (привычный) смысл в некоторых казалось бы очевидных ситуациях и т.п. Более того, если принять во внимание теорию управления хаотическими системами, то становится возможным на основе совершенно иных подходов, чем это принято в обычной теории, управлять динамической системой.

Таким образом, теоретические исследования, основанные на анализе временных рядов, могут дать мощный инструмент для понимания многих явлений, особенно когда имеющихся данных для построения модели может быть недостаточно.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

1 Введение. Рекомендуемая литература

2 Понятие временного ряда
  2.1 Задачи анализа временных рядов
  2.2 Описание процессов временными рядами

3 Наблюдаемые
  3.1 Бесконечномерное и конечномерное описание
  3.2 Дискретное представление

4 Методы обработки временных рядов
  4.1 Статистические методы обработки временных рядов
  4.2 Динамические методы обработки временных рядов

5 Размерность вложения
  5.1 Функциональный метод определения размерности вложения
  5.2 Метод Грассбергера-Прокаччиа

6 Информация и энтропия динамических систем
  6.1 Понятие энтропии
  6.2 Информация

7 Обобщенная размерность
  7.1 Фрактальная, информационная и корреляционная размерности

8 Разделение шума и детерминированного сигнала. Оценка энтропии
  8.1 Выделение детерминированных переменных
8.2 Оценка энтропии

9 Математические основы анализа временных рядов
  9.1 Вложения
  9.2 О рядах

10 Оптимизация выбора параметров
  10.1 Оптимальный выбор m
  10.2 Выбор времени задержки

11 Оценка длины ряда
  11.1 Оценка из свойств корреляционного интеграла

12 Основные методы прогноза нерегулярных временных рядов
  12.1 Сингулярный спектральный анализ (SSA)
  12.2 Прогноз методом SSA
  12.3 Локальная аппроксимация (LA)
  12.4 Построение прогноза на один шаг вперед

13 Сравнение различных методов прогноза LA и прогноз на несколько шагов
13.1 Порядок аппроксимации
13.2 Сравнение методов
13.3 Прогноз на несколько шагов вперед
14 Малые возмущения хаотических динамических систем
14.1 Анализ систем с внешними возмущениями
15 Подавление хаоса и управление хаотическими системами
15.1 Подавление хаоса
15.2 Управление с обратной связью
16 Стратегии конкурентных отношений
16.1 Шумы
16.2 Разорение игрока
16.3 Неблагоприятные шансы на выигрыш
16.4 Основные выводы
17 Разладка и сегментация временных рядов
17.1 Разладка
17.2 Сегментация
17.3 Показатель Хёрста и показатель Гёльдера
18 Фрактальные свойства ременных рядов
18.1 Вейвлет-преобразование и локальное Фурье-преобразование
19 Явление гомодинамичности
19.1 Линейные гомодинамические модели
19.2 Исходные гипотезы
19.3 Техника оценки параметров
20 Прогноз временных рядов естественного происхождения
20.1 Краткий обзор LA
20.2 Примеры прогнозов экономических показателей

Список литературы

[1] R.Shumway, D.S.Stoffer. *Time Series Analysis and its Applications.*— Springer, 2000.

[2] H.Kantz, T.Schreiber. *Nonlinear time series analysis.*— Cambridge University Press, 1997.

[3] G.Gouesbet, S.Meunier-Guttin-Cluzel, O.Ménard (Eds.) *Chaos and Its Reconstruction.*— New York: Nova Sci. Publ., 2003.

[4] Б.П.Безручко, Д.А.Смирнов. *Математическое моделирование и хаотические временные ряды.*— Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005.

[5] А.Ю.Лоскутов, А.С.Михайлов. *Основы теории сложных систем.*— Москва, Регулярная и хаотич. динамика, 2007.

[6] Р.М.Кроновер. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.*— М.: Постмаркет, 2000.

[7] Б.Мандельброт. *Фрактальная геометрия природы.*— М.: Ин-т комп. иссл–ий, 2002.

[8] М.Шредер. *Фракталы, хаос, степенные законы.*— Москва–Ижевск: РХД, 2001.

[9] Г.Шустер. *Детерминированный хаос. Введение.*— М., Мир, 1988.

[10] Е.Федер. *Фракталы.*— М.: Мир, 1991.

[11] Г.Г.Малинецкий, А.Б.Потапов. *Современные проблемы нелинейной динамики.*— м.: УРСС, 2000.