

# Физика хаоса

А.Ю.Лоскутов

Физический факультет МГУ

## Аннотация

В течение долгого времени представление о хаосе ассоциировалось с допущением, что в системе необходимо возбуждение по крайней мере чрезвычайно большого числа степеней свободы. Эта концепция, по-видимому, сформировалась под действием понятий, сложившихся в статистической механике: в газе движение каждой отдельной частицы в принципе предсказуемо, но поведение системы из очень большого числа частиц чрезвычайно сложно, и поэтому детализированный динамический подход теряет смысл. Отсюда — потребность в статистическом анализе. Однако, как показали многочисленные исследования, статистические законы а вместе с ними и статистическое описание не ограничены только очень сложными системами с большим числом степеней свободы. Случайное поведение может быть присуще и полностью детерминированным системам с небольшим числом степеней свободы. Дело здесь не в сложности исследуемой системы и не во внешних шумах, а в появлении при некоторых значениях параметров экспоненциальной неустойчивости движения. Динамика систем, вызванная такого рода неустойчивостью, и называется динамической стохастичностью или детерминированным (динамическим) хаосом. Фундаментальное значение исследований в этой области состоит в том, что они вскрывают природу случайного, дополняя гипотезу молекулярного хаоса гипотезой динамической стохастичности.

Теоретические и экспериментальные исследования нелинейных систем показали, насколько типичным и всеобщим явлением оказывается хаотическое поведение в системах с небольшим числом степеней свободы. Стало очевидным, что хаотические свойства могут проявлять самые разнообразные нелинейные системы, и если хаос не обнаруживается, то, возможно лишь потому, что либо он возникает в очень малых областях параметрического пространства, либо при значениях параметров, соответствующих физически нереализуемым областям.

Как же возникает хаотическое движение? В чем состоит природа хаоса? Казалось бы, путей возникновения хаотичности должно быть достаточно много. Однако выяснилось, что число сценариев процесса хаотизации совсем невелико. Более того, некоторые из них подчиняются универсальным закономерностям, и не зависят от природы системы. Одни и те же пути развития хаоса присущи самым разнообразным объектам. Универсальное поведение напоминает обычные

фазовые переходы второго рода, а введение ренормгрупповых и скейлинговых методов, известных в статистической механике, открывает новые перспективы в изучении хаотической динамики.

Настоящий курс посвящен основам теории динамического хаоса. В лекциях представлены основные результаты, полученные как в консервативной, так и диссипативной динамике: элементы теории нелинейного резонанса и теории КАМ, теорема Пуанкаре–Биркгофа о неподвижной точке и ее важность для понимания причин хаотичности, метод Мельникова, позволяющий аналитически получить критерий рождения хаоса. Отдельное внимание уделено природе хаоса: подробно изложены причины, приводящие к самоподобию и хаотичности в нелинейных системах. Как следствие, в таких системах имеет место непредсказуемость, необратимость и расщепление временных корреляций. Кроме того, рассмотрены критерии динамического хаоса, аттракторы, бифуркации, фрактальные множества, отображения, пространственно–временная динамика, временные ряды, а также проблема управления хаотическими динамическими системами.

## СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Гамильтоновы системы

Нелинейный резонанс

Элементы теории Колмогорова–Арнольда–Мозера. Диффузия Арнольда

Природа хаоса

Эргодичность, перемешивание, расщепление корреляций

Бильярды. Газ Лоренца

Диссипативные динамические системы

Критерии динамического хаоса

Размерность странных аттракторов

Фракталы

Отображения и некоторые их свойства

Хаос в одномерных отображениях

Универсальность Фейгенбаума

Отображения комплексной плоскости. Красота фракталов

Бифуркации в динамических системах

Типичные сценарии перехода к хаосу

Подавление хаоса и управление динамическими системами

Пространственно-временной хаос

Динамика систем сцепленных отображений

Временные ряды: анализ и прогноз

## Список литературы

- [1] *В.С.Анищенко, В.В.Астахов, Т.Е.Вадивасова и др.* Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах.— Москва–Ижевск: Ин-т компьт. иссл-ий, 2003. 530 с.
- [2] *В.И.Арнольд, А.Авец.* Эргодические проблемы классической механики.— Изд. “Рег. и хаотич. динамика”, 1999. 284 с.
- [3] *В.И.Арнольд, В.С.Афраймович, Ю.С.Ильяшенко, Л.П.Шильников.* // Динамические системы. Том 5.— М.: ВИНТИ, 1986. С.5–218.
- [4] *В.И.Арнольд, В.В.Козлов, А.И.Нейштадт.* Математические аспекты классической и небесной механики.— УРСС, Москва, 2002. 416 с.
- [5] *Д.Биркгоф.* Динамические системы.— Ижевск, Изд. дом “Удмуртский ун-т”, 1999. 408 с.
- [6] *Дж.Гукенхеймер, Ф.Холмс.* Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.— Москва–Ижевск, Ин-т комп. иссл., 2002. 560 с.
- [7] *Г.М.Заславский.* Стохастичность динамических систем.— М., Наука, 1984. 272 с.
- [8] *Г.М.Заславский.* Физика хаоса в гамильтоновых системах.— Москва–Ижевск, Ин-т компьютерных иссл-ий, 2004. 288 с.
- [9] *Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев.* Введение в нелинейную физику.— М., Наука, 1988. 368 с.
- [10] *И.П.Корнфельд, Я.Г.Синай, С.В.Фомин.* Эргодическая теория.— М., Наука, 1980. 382 с.
- [11] *Р.М.Кроновер.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории.— М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
- [12] *С.П.Кузнецов.* Динамический хаос.— М.: Физматлит, 2001. 296 с.
- [13] *А.Лихтенберг, М.Либерман.* Регулярная и стохастическая динамика.— М., Мир, 1984. 528 с.
- [14] *А.Ю.Лоскутов, А.Ю.Михайлов.* Основы теории сложных систем.— Москва–Ижевск: РХД, 2007.
- [15] *Г.Г.Малинецкий, А.Б.Потапов.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2000. 336 с.
- [16] *Б.Мандельброт.* Фрактальная геометрия природы.— М.: Ин-т комп. иссл-ий, 2002. 656с.
- [17] *Дж.Милнор.* Голоморфная динамика.— Ижевск: Регулярная и хаотич. динамика, 2000. 320с.
- [18] *Ю.Мозер.* Лекции о гамильтоновых системах.— М.: Мир, 1973. 168с.
- [19] *А.Д.Морозов.* Введение в теорию фракталов.— Москва–Ижевск, Ин-т компьютер. иссл., 2002. 160 с.
- [20] *Ф.Мун.* Хаотические колебания.— М., Мир, 1990. 312 с.
- [21] *Х.-О.Пайтген, П.Х.Рихтер.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем.— М.: Мир, 1993. 176с.
- [22] *А.Пуанкаре.* Новые методы небесной механики.— М.: Наука, 1971. 772 с.
- [23] *Д.Рюэль.* Случайность и хаос.— Москва–Ижевск: РХД, 2001. 192 с.

- [24] *Я.Г.Синай*. Современные проблемы эргодической теории.— М., Наука, 1995. 202 с.
- [25] *Д.В.Трещев*. Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем.— Фазис, Москва, 1998. 184 с.
- [26] *Е.Федер*. Фракталы.— М.: Мир, 1991. 254 с.
- [27] *Ф. Хартман*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мир, М., 1970. 720 с.
- [28] *А.Н.Шарковский, Ю.Л.Майстренко, Е.Ю.Романенко*. Разностные уравнения и их приложения.— Киев: Наукова думка, 1986. 280 с.
- [29] *М.Шредер*. Фракталы, хаос, степенные законы.— Москва–Ижевск: РХД, 2001. 528с.
- [30] *Р. да ла Яве*. Введение в КАМ–теорию.— РХД, Москва–Ижевск, 2003. 176 с.
- [31] *V.S.Afraimovich, S.Hsu*. Lectures on Chaotic Dynamical Systems.— *AMS-Press*, N.Y., 2003.
- [32] *R.L.Devaney*. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. 2nd edition.— Mass.: Addison-Wesley, 1989. 336 p.