Математические основы хаотических динамических систем

Александр Лоскутов, *физический факультет МГУ*

Аннотация

Динамический подход к описанию систем самого различного происхождения известен со времен Ньютона. Он является основой анализа большинства классических явлений в физике и других естественных науках: сначала строится соответствующая математическая модель в виде динамических уравнений, а затем тем или иным способом изучаются их решения, которые, в принципе, можно сопоставить с экспериментальными данными. Развитие этих идей, а также представление, что состояние модели в любой момент времени должно однозначно определяться начальными условиями, привело исследователей к понятию динамической системы.

Хотя динамическая система и является некоторой математической абстракцией, данная парадигма оказалась весьма продуктивным инструментом при описании многих реальных явлений. Наибольший успех в этом направлении был получен в первой трети XX века, когда была создана теория колебаний двумерных систем. Последующие усилия исследователей были посвящены изучению возможности распространить эту теория на многомерные системы. Однако, несмотря на значительные открытия в данной области, до 60-х годов XX столетия не было понятно, насколько сложными могут быть движения в таких системах.

Ситуация коренным образом изменилась после того как С.Смейл заложил основы гиперболической теории. Исследования в этом направлении выявили большое разнообразие динамики нелинейных систем и привели к одному из важнейших открытий XX века — динамическому хаосу. Были введены У-системы (позже названные системами Аносова), описаны бифуркации петель сепаратрис, приводящие к сложному поведению, и изучены бильярдные модели, являющиеся упрощенными моделями статистической физики.

Однако в то время эти идеи не находили широкого признания, поскольку построенные примеры носили весьма абстрактный характер, и было неясно, имеют ли данные конструкции какое-либо отношение к реальности. Более того, было распространено мнение, что хаотические явления, присущие физическим системам, имеют переходной характер, и, если достаточно долго наблюдать за системой, то хаос должен выродиться в регулярное движение.

Такая точка зрения сохранялась до середины семидесятых годов, когда ма-

тематические идеи теории динамических систем удалось связать с физической моделью, относящейся к гидродинамике, — знаменитой системой Лоренца. С этого времени началось систематическое изучение динамического хаоса.

Классическими примерами хаоса являются азартные игры, которые, в частности, изучаются теорией вероятности. Однако азартные игры — это недетерминированный процесс. Здесь допускается присутствие элемента случайности. Теория хаотических систем использует методы теории вероятности, однако не является ее частью. Хаос же следует определить как некоторый случайный процесс, который наблюдается в динамических системах, не подверженных влиянию шумов или каких-либо случайных сил. Поэтому теория хаоса рассматривается как часть теории динамических систем.

Для систем статистической механики с большим числом степеней свободы N, находящихся в состоянии равновесия, конфигурации частиц не подчиняются никаким динамическим законам и имеют предельное распределение при $N \to \infty$. Такие системы находятся в состоянии пространственного беспорядка. Одним из основных достижений теории хаоса является установление факта, что время в динамике играет ту же роль, что и число степеней свободы в статистической механике. Иными словами, детерминированный хаос описывается как динамический беспорядок.

В консервативных системах фазовый объем сохраняется. Этот означает, что выполняется теорема Лиувилля. Данное фундаментальное свойство предопределяет характер эволюции и дает ключ к пониманию происхождения хаотичности в консервативных системах. В диссипативных системах вследствие диссипации имеет место сжатие фазового объема. Эта принципиальное отличие проявляется в том, что в фазовом пространстве диссипативных систем появляются притягивающие множества, которые не существуют в консервативных системах — аттракторы (от англ. *attract* — притягивать).

Динамика диссипативных систем в определенном смысле более разнообразна, чем динамика консервативных систем. Здесь встречаются такие инвариантные множества, как устойчивые и неустойчивые стационарные точки и предельные циклы, многомерные притягивающие торы, соответствующие устойчивому квазипериодическому поведению с несоизмеримыми частотами, математический образ хаотических колебаний диссипативных систем — странный аттрактор, и др.

Странный аттрактор — это некоторое «сложно устроенное» множество в фазовом пространстве, к которому притягиваются почти все траектории из его некоторой окрестности, а на самом множестве движение имеет экспоненциально неустойчивый характер. Такое сочетание глобального сжатия с локальной неустойчивостью приводит к тому, что аттрактор уже не может быть гладким как, например, тор; он определенным образом расслаивается и представляет собой в некотором сечении канторово множество.

Основная идея введения нового термина — странного аттрактора — была основана на том, что такие подмножества фазового пространства играют определяющую роль в решении проблемы турбулентности. Хотя этот подход в полной мере не оправдался, данный подход послужил стимулом к развитию теории хаотических динамических систем и их приложений.

Настоящие лекции посвящены анализу хаотических явлений, возникающих главным образом в диссипативных системах. Приводятся основные сведения из общей теории, дается определение хаоса и рассматриваются различные типы аттракторов. Кроме того, описаны гиперболические множества, подкова Смейла, гомоклинические касания и связанные с ними экзотические явления — Ω–взрывы и дикие гиперболические множества. Также рассматриваются статистические свойства динамических систем, исследуемых в рамках эргодической теории, и объясняется принципиальное отличие стохастической динамики от детерминированного хаоса.

В настоящее время для изучения свойств сложных систем, в том числе и при экспериментальных исследованиях, широко используется подход, основанный на анализе сигналов, произведенных системой. Это особенно актуально в тех случаях, когда математически описать изучаемый процесс практически невозможно, но в распоряжении исследователей имеется некоторая характерная наблюдаемая величина. Анализ такого подхода составляет содержание последней части.

В основу представлений о детерминированном хаосе положено целое множество направлений современной математики: дифференциальная динамика, теория меры, функциональный анализ, теория особенностей, топология и др. К сожалению, сейчас большинство понятий из этих областей сильно формализованы и зачастую их физический смысл теряется за завесой абстрактных рассуждений, терминов и теорем. Поэтому лекционный курс, в основном, представляет собой качественное изложение теории хаотических динамических систем, где большинство формальных идей сопровождается наглядными примерами.

СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Список литературы

[1] Смейл С *УМН* **25** 113 (1970)

[2] Аносов Д В *Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны* (М.: Наука, 1967)

[3] Синай Я Г, Шильников Л П (Ред.) *Странные аттракторы.* Сб. статей. (М.: Мир, 1981)

[4] Лоскутов А *УФН* **177** 989 (2008)

[5] Гукенхеймер Дж, Холмс Ф *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей* (Москва–Ижевск, Инст. комп. иссл., 2002)

[6] Арнольд В И, Афраймович В С, Ильяшенко Ю С, Шильников Л П, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 5* (М.: ВИНИТИ, 1986) с.5

[7] Devaney R L *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* (New York: Addison-Wesley Publ. Co., 1993, Second Edition).

[8] Синай Я Г *Современные проблемы эргодической теории* (М.: Наука, 1995)

[9] Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в теорию динамических систем* (М.: МЦНМО, 2005)

[10] Каток А Б, Хасселблат Б *Введение в современную теорию динамических систем* (М.: Факториал, 1999)

[11] Аносов Д В, Солодов В В, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 66* (М.: ВИНИТИ, 1991) с.12

[12] Smale S *The Mathematics of Time. Essays on Dynamical Systems, Economic Processes and Related Topics* (Berlin, Springer, 1980)

[13] Лоскутов А Ю, Михайлов А С *Основы теории сложных систем* (Москва–Ижевск: РХД, 2007)

[14] Заславский Г М *Гамильтонов хаос и фрактальная динамика* (Москва—Ижевск: РХД, 2010)

[15] Алексеев В М *Лекции по небесной механике* (Москва–Ижевск: РХД, 2001)

[16] Шильников Л П, Шильников А Л, Тураев Д В, Чуа Л *Методы качественной теории в нелинейной динамике.* Часть 1, 2. (Москва–Ижевск, Инст. комп. иссл., 2004, 2009).

[17] Нитецки З *Введение в дифференциальную динамику* (М.: Мир, 1975)

[18] Palis J, Takens F *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993)

[19] Плыкин Р В, Сатаев Е А, Шлячков С В, в кн. *Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 66* (М.: ВИНИТИ, 1991) с.100

[20] Арнольд В И *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (М.: Наука, 1978)

[21] Корнфельд И П, Синай Я Г, Фомин С В *Эргодическая теория* (М.: Наука, 1980)

[22] Eckmann J-P, Ruelle D *Rev. Mod. Phys.* **57** 617 (1985)

[23] *Lyapunov Exponents*, in: Lect. Notes in Math. **1186** (Berlin: Springer, 1986)

[24] Мартин Н, Ингленд Дж *Математическая теория энтропии* (М.: Мир, 1988)